

Hochenergetische Photon-Photon-Streuung

Norbert Liebsch

1976

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Hochenergetische Photon-Photon-Streuung

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von
Norbert Liebsch
aus Meppen/Ems

Mai 1976



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Salecker
2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 27.7.1976

Zusammenfassung:

In der Quantenelektrodynamik bieten nichtlineare Effekte mit geschlossenen Fermionenschleifen die Möglichkeit, die Feynmansche Ausbreitungsfunktion des Elektrons eichinvariant zu prüfen. Zu den Streuprozessen, die eine Prüfung bei hohen Energien und großem Impulsübertrag gestatten, zählt die Photon-Photon-Streuung.

Die hochenergetische Photon-Photon-Streuung wird hauptsächlich durch die niedrigste störungstheoretische Ordnung proportional e^4 bestimmt. Strahlungskorrekturen proportional e^8 ergeben, obwohl sie relativ zur niedrigsten Ordnung um die Größenordnung $\alpha^2 = (1/137)^2$ kleiner sind, nahe der Vorwärtsstreurichtung Beiträge, die bei hohen Energien nicht mehr zu vernachlässigen sind, da sie mit der einfallenden Photonenenergie ansteigen.

Die Streuamplituden 4. Ordnung werden mittels einfach subtrahierter Dispersions-Beziehungen analytisch für alle Energien und Streuwinkel berechnet. Für die Streuamplituden 8. Ordnung wird eine im Bereich kleiner Streuwinkel gültige Hochenergienäherung mit Hilfe der Stoßfaktor-Darstellung benutzt, die auf numerisch berechenbare Integral-Darstellungen führt.

Die Auswertung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der unpolarisierten Photon-Photon-Streuung zeigt, daß bei künftigen geplanten Messungen der hochenergetischen Photon-Photon-Streuung mit Photonenenergien im GeV-Bereich und Streuwinkeln bis zu einigen Milliradian von den Strahlungskorrekturen ein wesentlicher Beitrag zu erwarten ist:

Bei der Einfallsennergie $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ mc}^2$ pro Photon im Schwerpunkt-System ist der Streuquerschnitt unter Einschluß der Strahlungskorrekturen im Streuwinkelbereich $0 \leq \vartheta \leq 5 \text{ mrad}$ um den Faktor 1 ($\vartheta = 5 \text{ mrad}$) bis 6.7 ($\vartheta = 0 \text{ mrad}$, Vorwärtsstreuung) größer als der Streuquerschnitt, bei dem nur die niedrigste Näherung berücksichtigt ist.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
A. Photon-Photon-Streuung	8
1. Virtuelle und reelle Photon-Photon-Streuung	8
2. Kinematik	11
3. Polarisierete und unpolarisierte Photon-Photon-Streuung	16
4. Der Vakuumpolarisationstensor 4. Stufe	21
B. Berechnung der Photon-Photon-Streuung in der störungstheoretischen Ordnung e^4	26
5. Darstellung der Streuamplitude $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(4)}(s, t, u)$ durch eine einfache Dispersions-Relation	26
6. Berechnung des absorptiven Anteils der Streuamplitude	29
7. Ausführung der Spektralintegration	33
8. Die 5 Helizitätsamplituden, Wirkungsquerschnitte der nieder- und hochenergetischen Photon-Photon-Streuung	35
C. Berechnung der Photon-Photon-Streuung in der störungstheoretischen Ordnung e^8	41
9. Stoßfaktor-Darstellung für die Hochenergie- näherung der Streuamplitude $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(8)}(s, t, u)$	41
10. Integration über den transversalen Photonenimpuls	46
11. Vorwärtsstreuung	53
D. Diskussion der hochenergetischen Photon-Photon- Streuung	56
12. Numerische Auswertung	56
13. Diskussion der Resultate	59
Anhang: Die transzendenten Funktionen $B(x)$, $T(x)$, $I(x, y)$	68
Literaturverzeichnis	75

Einleitung

Für die klassische Elektrodynamik im Vakuum gilt wegen der Linearität der Maxwell'schen Gleichungen bezüglich des Feldstärketensors $F_{\mu\nu} = (\underline{E}, \underline{B})$ das Prinzip der linearen Superposition. Während es für makroskopische Abmessungen und nicht zu starke Felder erfüllt ist, sagt die Quantenelektrodynamik (QED) für atomare und subatomare Dimensionen die Existenz einer nichtlinearen Wechselwirkung von elektromagnetischen Feldern voraus: Die Fermionen, die den Dirac-See negativer Energiezustände anfüllen, können durch Absorption von elektromagnetischer Strahlung zur Bildung virtueller und reeller Elektron-Positron-Paare angeregt werden, die unter Emission von Strahlung wieder vernichten. Das Vakuum erhält damit die Eigenschaften eines polarisierbaren Mediums.

Derartige nichtlineare Prozesse durch Wechselwirkung von elektromagnetischen Feldern mit dem Elektron-Positron-Vakuum sind in der Beschreibung mit Feynman-Graphen dadurch gekennzeichnet, daß sie geschlossene Fermionschleifen enthalten. Sie haben neben ihrer fundamentalen Bedeutung für die QED in den letzten Jahren vor allem unter dem Gesichtspunkt steigendes Interesse gefunden, daß sie die Möglichkeit eröffnen, die Gültigkeit der QED in eichinvarianter Weise zu überprüfen ¹⁾.

Zwar hat die QED in der Vergangenheit durch eine Reihe von Experimenten eine ausgezeichnete Bestätigung ihrer Voraussagen erfahren: Präzisionsmessungen der Lamb-Verschiebung der $2S_{1/2}$ - $2P_{1/2}$ -Niveaus beim Wasserstoff und des anomalen magnetischen Momentes ($g-2$ Faktor) von Elektron und μ -Meson ergeben mit größter Genauigkeit die Werte, die von der Theorie für diese Niederenergie-Effekte vorhergesagt werden. Streuexperimente mit gegenläufigen e^-e^- -Strahlen (Møller-Streuung) und e^-e^+ -Strahlen (Bhabha-Streuung, Vernichtung in μ -Mesonen-Paare, 2-Quanten-Paarvernichtung) sowie

Streuexperimente vom Bethe-Heitler-Typ erlauben die Untersuchung bei hohen Energien und großem Impuls-Übertrag.

Trotz dieser guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment werden nach wie vor intensive Anstrengungen unternommen, die Vorhersagen der Theorie experimentell zu verifizieren und umgekehrt Messungen durch die Theorie abzusichern; denn die Übereinstimmung bezieht sich nur auf wenige niedrige, berechenbare Ordnungen der bisher nur störungstheoretischen Lösung der QED, in einigen Fällen auch auf Teilsummen der Störungsreihe, und sie ist naturgemäß begrenzt, wenn sich zu der rein quanten-elektrodynamischen Wechselwirkung zwischen geladenen Elementarteilchen und Photonen der Einfluß der starken und schwachen Wechselwirkung bemerkbar macht. Es besteht daher die Aufgabe, außer der Gültigkeit fundamentaler Prinzipien wie Lorentz-Invarianz, Kausalität usw. die Güte der Störungsentwicklung zu untersuchen und den möglichen Einfluß der anderen Wechselwirkungen abzutrennen.

Ziel der Prüfung der QED ist dabei, die Maxwell-Gleichungen, die Dirac-Gleichung und ihre gegenseitige Verknüpfung durch die minimale Kopplung zwischen Dirac-Strom und elektromagnetischem Feld zu testen. Im Feynmanschen Formalismus der QED heißt das, im allgemeinen Photonen- und Elektronen-Propagator sowie Elektron-Photon-Vertex gleichzeitig überprüfen.

Salecker hat in Arbeiten über die Elektron-Elektron-Streuung ²⁾, den Compton-Effekt am Elektron und die Elektron-Positron-Paarvernichtung ³⁾ den Anstoß zu einer systematischen Untersuchung gegeben, inwieweit Streuexperimente zu einer Überprüfung der QED geeignet sind. Andere Vorschläge galten der Weitwinkel-Paarerzeugung ⁴⁾ und Bremsstrahlung ⁵⁾. Salecker wählte dazu unter Berücksichtigung der Lorentz-Invarianz allgemeinst mögliche nichtlokale Formfaktoren, welche

die Abweichung von der konventionellen QED beschreiben. Mit diesem heute allgemein anerkannten Ansatz berechnet er z.B. die e^-e^- -Streuung in niedrigster störungstheoretischer Ordnung. Berücksichtigt man dann die Strahlungskorrekturen zur unmodifizierten Theorie und zieht die Beiträge anderer Wechselwirkungen ab, soweit sie bekannt sind, dann liefert der Vergleich mit den experimentellen Daten eine quantitative Aussage darüber, wie genau das Experiment Propagatoren und Vertex zu prüfen vermag. Experimente mit festem Energie-Impuls-Übertrag gestatten eine modellunabhängige Prüfung durch punktweises Ausmessen des nichtlokalen Formfaktors, in den anderen Fällen parametrisiert man die Abweichung vom theoretisch erwarteten Ergebnis durch Angabe einer Prüflänge bzw. Energieschranke.

Die Einführung lorentzinvarianter Formfaktoren gewährleistet zwar die relativistische Invarianz der abgeänderten Theorie, verletzt jedoch i.a. andere fundamentale Prinzipien. Will man insbesondere die Invarianz gegenüber Eichtransformationen 2. Art beibehalten, so zeigt bereits die Ward-Takahashi-Identität, daß die Vorgabe eines Fermion-Propagators eine bestimmte Form der Vertex-Funktion erzwingt und umgekehrt. Da die Ward-Takahashi-Identität zwischen Elektron-Propagator und 1-Photon-Vertex nur den Anfang der Chang-Mani-Gleichungen bildet, eines Systems rekursiver Beziehungen zwischen n - und $(n-1)$ -Photon-Vertizes, das aus der Invarianz der Theorie gegen Eichtransformationen 2. Art folgt, erfordert die Modifikation des Elektron-Propagators unter Beibehaltung der Eichinvarianz der Theorie außer in wenigen Sonderfällen die Einführung von Multi-Photon-Vertizes.

Kroll ⁶⁾ hat mit Hilfe eines Differenzenoperators die Lösungsmannigfaltigkeit der Chang-Mani-Gleichungen zu gegebenem Fermion-Propagator konstruiert und damit den Weg zu eichinvarianten Modifikationen der gewöhnlichen QED gewiesen, wie sie zur Prüfung der Theorie verwendet

werden. Unter den nicht eindeutigen Lösungen der Chang-Mani-Gleichungen ist jene ausgezeichnet, die nur die sog. " induzierten Vertizes " einführt, während die sog. " intrinsic-Vertizes " (verallgemeinerte Pauli-Momente) verschwinden. Sie wird " minimales Modell " genannt, da sie als direkte Verallgemeinerung der minimalen Kopplung aufgefaßt werden kann. Kroll zeigt, daß im Rahmen des minimalen Modells die oben erwähnten Streuexperimente zur Prüfung der Ausbreitungsfunktion des Elektrons ungeeignet sind. Wenn man nämlich einen abgeänderten Fermion-Propagator wie den mit einem Formfaktor versehenen Feynman-Propagator vorgibt und damit im minimalen Modell beispielsweise die Compton-Streuung berechnet, stimmt das Ergebnis mit dem der gewöhnlichen QED überein. Diese Feststellung dehnte Ringhofer ⁷⁾ auf Modifikationen mit intrinsic-Vertizes aus mit dem Resultat, daß lediglich deren on-mass shell-Anteil geprüft wird. Welche Aussagen über die Gültigkeit der QED sich unter diesen Umständen machen lassen, untersuchte Tomberger ⁸⁾.

Während im Rahmen des minimalen Modells Abänderungen der konventionellen QED bei den genannten Streuprozessen nicht beobachtet werden können, weil die Streuamplitude von der speziellen Gestalt des Fermion-Propagators unbeeinflusst bleibt, hängt das Resultat sehr wohl von der Propagator-Modifikation ab, wenn man unter Beachtung der Eichinvarianz 2. Art geschlossene Fermionschleifen berechnet. Im minimalen Modell ist ihre Beschreibung allerdings nicht eindeutig und ihre Berechnung wegen der erforderlichen Integration über den in der Schleife umlaufenden 4-Impuls auch nur modellabhängig möglich.

Man wird also für eine Prüfung des Fermion-Propagators nach solchen Prozessen Ausschau halten, die in niedrigen störungstheoretischen Ordnungen aus geschlossenen e^-e^+ -Schleifen bestehen oder diese als Teilgraphen enthalten: Geschlossene Fermionschleifen bieten die Möglichkeit zur eichinvarianten Prüfung der Ausbreitungsfunktion des Elektrons.

Betrachten wir nun einige dieser in Frage kommenden nichtlinearen Prozesse:

Eine Fermionschleife mit 2 Elektron-Photon-Vertizes (Selbstenergie 2. Ordnung des Photons) ist abgesehen von ihrer Relevanz für die Renormierung der Elektron-Ladung z.B. Bestandteil von Feynman-Graphen, die zur Lambschen Verschiebung beim Wasserstoff und μ -mesischen Wasserstoff und zum anomalen magnetischen Moment der geladenen Leptonen beitragen. Hier führt die nichtlineare Wechselwirkung zu beobachtbaren Effekten, die eine Überprüfung im Niederenergiebereich gestatten. So haben Salecker und Mitarbeiter ⁹⁾ den Beitrag des Vakuum-polarisations-Graphen niedrigster Ordnung zum anomalen magnetischen Moment des μ -Mesons und zur Lambschen Verschiebung beim μ -Mesonen-Wasserstoff im Hinblick auf eine eichinvariante Prüfung der QED untersucht.

Eine Fermionschleife mit 3 (allgemeiner: mit einer ungeraden Anzahl Vertizes) ergibt nach dem Furry-Theorem wegen der Erhaltung der Ladungs-Parität keinen Beitrag.

Fermionschleifen mit 4 Vertizes (Vakuumpolarisation 4. Ordnung) treten in der nächsthöheren störungstheoretischen Ordnung auf. U.a. ergeben sie die nichtlinearen Streuprozesse proportional e^4 , die im Prinzip eine Überprüfung des Elektron-Propagators bei hohen Energien und großen Impuls-Überträgen ermöglichen: Delbrück-Streuung, Photon-Spaltung und -Verschmelzung sowie Photon-Photon-Streuung.

Zum Delbrück-Effekt, d.i. die Streuung eines Photons am Coulomb-Feld eines Atomkerns der Kernladung Z , liegen seit längerem die Resultate einiger Experimente bei verhältnismäßig niedrigen Energien vor. Er wurde neuerdings bei DESY auch bei Photonenenergien von einigen GeV gemessen. Die bislang verfügbaren Daten und die Bedeutung weiterer geplanter Messungen der hochenergetischen Delbrück-Streuung für die eichinvariante Prüfung der QED

untersuchte Kraus ¹⁰⁾ unter Einbeziehung aller Coulomb-Korrekturen in $Z\alpha$.

Demgegenüber scheint die Messung der Spaltung eines Photons im Kernfeld noch nicht zweifelsfrei gelungen zu sein. Die Möglichkeiten, diesen Effekt für die Prüfung der QED heranzuziehen, analysierten Schneider ¹¹⁾ und Steinhöfer ¹²⁾ .

Ein auch nur qualitativer Nachweis der Photon-Photon-Streuung (Streuung von Licht an Licht) steht bis heute aus, obwohl in der Literatur eine Reihe von Projekt-Studien erschienen sind, die eine Messung dieses nicht-linearen Effekts in naher Zukunft für realisierbar halten ¹³⁻¹⁹⁾ . Neben anderen Vorschlägen erscheint aussichtsreich, die hochenergetische Bremsstrahlung aus einem Beschleunigerstrahl zusammen mit einem Laser-Strahl hoher Intensität als Photonen-Target zu verwenden oder die hochenergetischen Bremsstrahlen von 2 gegenläufigen Strahlen aufeinander zu schießen, wie sie in derzeitigen und künftigen Speicherring-Anlagen zur Verfügung stehen. Die Bedeutung der Photon-Photon-Streuung in niedrigster Ordnung Störungstheorie für die eichinvariante Prüfung des Elektron-Propagators wurde in einer eigenen früheren Arbeit diskutiert ²⁰⁾ .

Der letztgenannte nichtlineare Effekt der Photon-Photon-Streuung bei hohen Energien ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Neuere Untersuchungen des Hochenergieverhaltens von 2-Teilchen-Streuprozessen in der QED geben Hinweise darauf, daß bei Photonenenergien im GeV-Bereich, gemessen im Schwerpunkt-System, der Einfluß von Strahlungskorrekturen zum Vakuumpolarisationsgraphen 4. Ordnung wesentlich wird und zu einem experimentell beobachtbaren Effekt im differentiellen Wirkungsquerschnitt nahe der Vorwärtsstreuung führen kann. Es sind dies Feynman-Diagramme höherer Störungstheoretischer Ordnung, die iterierte Fermionschleifen enthalten,

also gerade jene Graphen, die sich für die Prüfung des Elektron-Propagators anbieten. Es liegt daher nahe, in einem ersten Schritt die Photon-Photon-Streuung einschließlich relevanter Strahlungskorrekturen unter den Bedingungen der hochenergetischen Streuung in der konventionellen QED zu berechnen.

Obwohl das Anliegen der Arbeit nicht in erster Linie die Prüfung der QED ist, können die erzielten Resultate auch als ein Beitrag zu dieser umfassenderen Problemstellung verstanden werden:

Einerseits klären sie die bei künftigen Messungen der reellen hochenergetischen Photon-Photon-Streuung zu erwartenden Verhältnisse, andererseits besteht die Absicht, die Ergebnisse einzubeziehen in gegenwärtige Untersuchungen über hochenergetische virtuelle und quasireelle Photon-Photon-Streuung bei Prozessen, die mit Hilfe gegenläufiger Strahlen eine neuartige Möglichkeit eröffnen, die Gültigkeit der QED bei hohen Energien und großem Impuls-Übertrag zu prüfen.

A. Photon-Photon-Streuung

Nach einem Überblick über verschiedene Prozesse der QED, bei denen die nichtlineare Wechselwirkung zwischen 4 Photonenfeldern infolge Polarisierbarkeit des Elektron-Positron-Vakuums eine Rolle spielt, werden die kinematischen Bedingungen der Streuung reeller, polarisierter Photonen im Schwerpunkt-System zusammengestellt. Diskrete Symmetrien schränken die Zahl der Streuamplituden auf 5 unabhängige ein, die in die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts der unpolarisierten Photon-Photon-Streuung eingehen. Sein Hochenergieverhalten wird durch die 4. und 8. Ordnung Störungstheorie bestimmt.

1. Virtuelle und reelle Photon-Photon-Streuung

Die Wechselwirkung von 4 virtuellen oder reellen Photonen beschreibt das Skelett-Diagramm Fig.1.

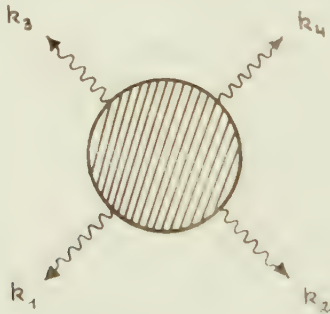


Fig.1: Skelett-Diagramm der Photon-Photon-Streuung

Es werden natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$ gewählt. Die verwendete Metrik ist $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.

Es sind u.a. folgende Mechanismen der virtuellen und reellen Photon-Photon-Streuung möglich:

Resonanzstreuung durch Austausch von neutralen Systemen mit der Ladungsparität $C = +1$ z.B. gebundener Zustände geladener Teilchen wie (e^-e^+) , $(\mu^-\mu^+)$, $(\pi^-\pi^+)$, (K^-K^+) usw. oder neutraler Teilchen wie π^0 , η oder durch Graviton-Austausch ^{21,22)}. Die Breite dieser Resonanzen ist umgekehrt proportional zur Lebensdauer der instabilen Systeme und ihr Beitrag zur Streuung daher vernachlässigbar klein.

Streuung infolge Polarisierbarkeit des Vakuums z.B. der Leptonen und π -Mesonen ²³⁾.

Die Streuung durch Erzeugung und Vernichtung von e^-e^+ -Paaren überwiegt, verglichen mit der Vakuumpolarisation anderer Teilchen, bei hohen Energien im Verhältnis der Quadrate der Teilchenmassen und soll deshalb hier ausschließlich betrachtet werden.

Die Photon-Photon-Streuung ist in der klassischen Elektrodynamik des Vakuums wegen der Linearität der Maxwell-Gleichungen in den Feldgrößen unbekannt. Sie kann im Bereich kleiner Energien durch einen nichtlinearen Zusatzterm zur Lagrange-Dichte des Maxwell-Feldes beschrieben werden, der wegen der relativistischen Invarianz vom 4. Grad in den Feldstärken ist

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\underline{B}^2 - \underline{E}^2) - \frac{2}{45} \frac{\alpha^2}{m^4} [(\underline{B}^2 - \underline{E}^2)^2 + 7 (\underline{B} \cdot \underline{E})^2]. \quad (1.1)$$

Diese effektive oder äquivalente Lagrange-Dichte ist eine Näherung der von Heisenberg und Euler ²⁴⁾ und später von Schwinger ²⁵⁾ abgeleiteten Lagrange-Dichte für ein gleichförmiges, unendlich ausgedehntes äußeres elektromagnetisches Feld. Sie gibt den nichtlinearen Effekt der Streuung von Licht an Licht unterhalb der Energieschwelle für die Paarerzeugung

$$\gamma + \gamma \longrightarrow e^- + e^+ \quad (1.2)$$

richtig wieder ²⁶⁾.

Wenn man das Skelett-Diagramm Fig.1 nach Potenzen der Kopplungskonstanten $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ der elektromagnetischen Wechselwirkung entwickelt, treten in niedrigster nicht-verschwindender Ordnung der Störungstheorie geschlossene e^-e^+ -Schleifen mit 4 $e\gamma$ -Vertizes auf: Vakuumpolarisations-Graphen 4. Ordnung.

Den Beitrag dieser Fermionschleifen zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons und μ -Mesons, die eine eichinvariante Teilmenge der Strahlungskorrekturen in der Ordnung e^6 bilden, haben Aldins et al. ²⁷⁾ berechnet.

Pascual und de Rafael ²⁸⁾ haben den Beitrag der Vakuumpolarisation 4. Ordnung zur Lebensdauer des Ortho-Positroniums (3S_1 -Zustand des Positroniums) bezüglich seines Zerfalls in 3 γ -Quanten berechnet.

Nachdem Niederenergienäherungen ²⁹⁾ der reellen Photon-Photon-Streuung und Hochenergienäherungen der Streuung in Vorwärtsrichtung und des totalen Wirkungsquerschnitts ³⁰⁾ bekannt waren, haben erstmals Karplus und Neumann ³¹⁾ das Problem, die Photon-Photon-Streuung in voller Allgemeinheit zu berechnen, im Rahmen der QED angegangen. Ihre Resultate sind jedoch so kompliziert, daß nur Spezialisierungen explizit angegeben werden.

Mit der eleganten Methode der Mandelstam-Darstellung (doppelte Dispersions-Relationen), die der Symmetrie des Prozesses besonders angepaßt ist, haben Costantini et al. ³²⁾ den Vakuumpolarisations-Graphen 4. Ordnung mit je 2 äußeren virtuellen und reellen Photonen vollständig berechnet und den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Teilbruch-Streuung (Streuung eines Photons am Coulomb-Feld eines Atomkerns) erhalten. Durch Spezialisierung berechneten die Autoren ferner die übrigen nichtlinearen Streuprozesse in der Ordnung e^4 , nämlich Photon-Spaltung und -Verschmelzung im Kernfeld sowie die Photon-Photon-Streuung, die zuvor De Tollis ³³⁾ ebenfalls mit Hilfe der Mandelstam-Darstellung berechnet hat.

2. Kinematik

Wie in Fig.1 werden die Photonen mit 4-Impuls k und 4-Vektor der Polarisation $\epsilon(k)$ aus Symmetriegründen auslaufend gezählt. Der Energie-Impuls-Erhaltungssatz für die elastische Streuung reeller Photonen lautet dann

$$\begin{aligned} k_i^2 &= 0, \quad i = 1 \dots 4 \\ \sum_{i=1}^4 k_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Von den 3 skalaren relativistischen Invarianten, den Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{4} (k_1 + k_2)^2, \\ t &= \frac{1}{4} (k_1 + k_3)^2, \\ u &= \frac{1}{4} (k_1 + k_4)^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

sind je 2 unabhängig, da zwischen ihnen wegen (2.1) die Beziehung besteht

$$s + t + u = 0. \quad (2.3)$$

Im Schwerpunkt-System (CM-System) der einfallenden Photonen 1,2 und der gestreuten Photonen 3,4 verschwindet der gesamte lineare Impuls vor und nach dem Stoß

$$\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = \underline{k}_3 + \underline{k}_4 = 0. \quad (2.4)$$

Das kartesische Koordinatensystem wird so gewählt, daß die xz - Ebene die Streuebene definiert und Einfalls-

sowie Streurichtung mit der z - Achse den halben Streuwinkel ϑ einschließen. Der $\underline{z}$ -Vektor des Impulsübertrags

$$2 \underline{z} = \underline{k}_1 + \underline{k}_3 \quad (2.5)$$

weist dabei in Richtung der x - Achse.

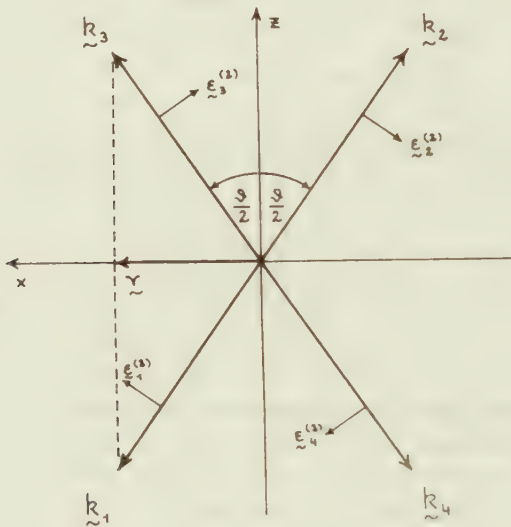


Fig.2: CM-System der Photon-Photon-Streuung

Die 4-Impulse der Photonen sind in dieser geometrischen Anordnung

$$\begin{aligned} \underline{k}_1 &= (-\omega, -\underline{k}), & \underline{k} &= (-\omega \sin \frac{\vartheta}{2}, 0, +\omega \cos \frac{\vartheta}{2}), \\ \underline{k}_2 &= (-\omega, +\underline{k}), & \underline{k}' &= (+\omega \sin \frac{\vartheta}{2}, 0, +\omega \cos \frac{\vartheta}{2}), \\ \underline{k}_3 &= (+\omega, +\underline{k}'), & \vartheta &= \arccos \left(\frac{\underline{k} \cdot \underline{k}'}{\omega^2} \right), \\ \underline{k}_4 &= (+\omega, -\underline{k}'), \end{aligned} \quad (2.6)$$

Das Quadrat der Energie eines Photons im CM-System ist

$$s = \frac{1}{2} (k_1 \cdot k_2) = \frac{1}{2} (\omega^2 + \underline{k}^2) = \omega^2, \quad (2.7)$$

während die beiden anderen Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} (k_1 \cdot k_3) = -s \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \\ u &= \frac{1}{2} (k_1 \cdot k_4) = -s \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

proportional sind zum Übertrag des 4-Impulses bzw. des gekreuzten 4-Impulses.

Das physikalische Gebiet der 3 Streukanäle

$$\begin{aligned} s - \text{Kanal:} & \quad s \geq 0, \quad t, u \leq 0 \\ t - \text{Kanal:} & \quad t \geq 0, \quad s, u \leq 0 \\ u - \text{Kanal:} & \quad u \geq 0, \quad s, t \leq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

wird in dem Mandelstam-Diagramm Fig.3, in dem s, t, u als Schwerpunkt-Koordinaten aufgetragen sind, durch die schraffierten Sektoren wiedergegeben.

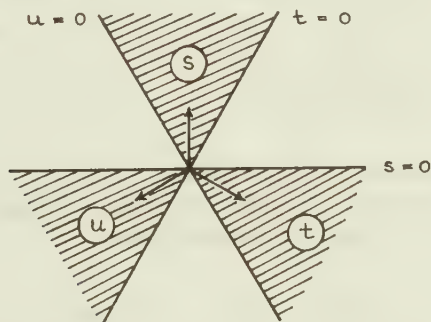


Fig.3: Mandelstam-Diagramm für die Photon-Photon-Streuung

(s), (t), (u) bezeichnen das physikalische Gebiet im s-, t-, u-Kanal der Reaktion.

Für ein Photon hat man außer seinem Energie-Impuls-Vektor k den raumartigen Einheitsvektor der Polarisation

$$\begin{aligned}\epsilon(k) &= (\epsilon_0, \underline{\epsilon}), \\ \epsilon^2(k) &= -1\end{aligned}\tag{2.10}$$

anzugeben, zwischen denen die Transversalitätsbedingung besteht

$$\epsilon(k) \cdot k = 0\tag{2.11}$$

In der Richtung $\epsilon_0 = 0$, die im folgenden verwendet wird, reduziert sich (2.11) auf die 3-dimensionale Beziehung

$$\underline{\epsilon}(k) \underline{k} = 0,\tag{2.12}$$

die besagt, daß zu gegebenem Ausbreitungsvektor k 2 linear unabhängige Polarisationsrichtungen $\epsilon^{(1)}(k), \epsilon^{(2)}(k)$ existieren, die so gewählt werden können, daß gilt

$$\begin{aligned}\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) &= -\delta_{\lambda\lambda'}, & \lambda, \lambda' &= 1, 2 \\ \epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k &= 0, \\ \left[\underline{\epsilon}^{(1)}(k) \wedge \underline{\epsilon}^{(2)}(k) \right] \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} &= 1.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Die zugehörigen Vektorpotentiale beschreiben die Ausbreitung ebener, linear polarisierter elektromagnetischer Wellen, während die Linearkombinationen

$$\epsilon^{(\pm)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \epsilon^{(1)}(k) \pm i \epsilon^{(2)}(k) \right\}\tag{2.14}$$

Wellen links- bzw. rechtszirkularer Polarisation (Photonen positiver bzw. negativer Helizität) definieren.

Die Vektoren (2.14) besitzen die Eigenschaften

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(\lambda)*}(k) &= \varepsilon^{(-\lambda)}(k), \\ \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \varepsilon^{(\lambda')*}(k) &= -\delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = \pm \\ \varepsilon^{(\lambda)}(k) \cdot k &= 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Als die beiden 4-Vektoren linearer Polarisation

$\varepsilon_i^{(\lambda)} = \varepsilon^{(\lambda)}(k_i)$, $\lambda=1,2$ mit den Eigenschaften (2.13) wählen wir für das i -te Photon mit dem in (2.6) definierten Impuls k_i , $i=1\dots4$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^{(1)} &= (0, \underline{\varepsilon}_i^{(1)}) : & \underline{\varepsilon}_i^{(1)} &= (0, 1, 0) = \underline{\varepsilon} \\ \varepsilon_i^{(2)} &= (0, \underline{\varepsilon}_i^{(2)}) : & -\underline{\varepsilon}_2^{(2)} = \underline{\varepsilon}_1^{(2)} &= (+\cos \frac{\vartheta}{2}, 0, +\sin \frac{\vartheta}{2}) \\ & & -\underline{\varepsilon}_4^{(2)} = \underline{\varepsilon}_3^{(2)} &= (-\cos \frac{\vartheta}{2}, 0, +\sin \frac{\vartheta}{2}).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Der senkrecht zur Streuebene orientierte Vektor $\underline{\varepsilon}_i^{(1)}$, der zu ihr parallele Vektor $\underline{\varepsilon}_i^{(2)}$ und der Ausbreitungsvektor $\underline{k}_i$ bilden in dieser Reihenfolge in Übereinstimmung mit der letzten Forderung von (2.13) ein Rechtssystem.

Die entsprechend (2.14) gebildeten Linearkombinationen $\varepsilon_i^{(\lambda)} = \varepsilon^{(\lambda)}(k_i)$, $\lambda = \pm$ definieren für das i -te Photon die Einheitsvektoren positiver und negativer Helizität.

3. Polarisierte und unpolarisierte Photon-Photon-Streuung

Zu jedem der 4 an der Streuung beteiligten Photonen existieren 2 linear unabhängige Zustände linearer bzw. zirkularer Polarisation. Dementsprechend kann man 2^4 invariante Amplituden

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) \sim \langle k_3 \epsilon_3^{(\lambda_3)}; k_4 \epsilon_4^{(\lambda_4)} | T | k_1 \epsilon_1^{(\lambda_1)}; k_2 \epsilon_2^{(\lambda_2)} \rangle \quad (3.1)$$

konstruieren für die Streuung linear bzw. zirkular polarisierter Photonen. Es ist zweckmäßig, statt der Photonenimpulse die Invarianten (2.2) als kinematische Variable zu verwenden. Die Indizes $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ bezeichnen die Konfiguration der Polarisationszustände, und zwar λ_1, λ_2 die des einlaufenden und λ_3, λ_4 die des gestreuten 2-Photonen-Systems. Ist z.B. Photon 1 linear polarisiert, so nimmt λ_1 den Wert 1 ($\perp$ Streuebene) oder 2 ($\parallel$ Streuebene) an, während $\lambda_1 = \pm$ die beiden möglichen Helizitätszustände kennzeichnet.

Die Zahl von 16 Amplituden definierter Polarisation wird durch die diskreten Symmetrien der Paritätstransformation P und der Zeitumkehr T sowie durch die Symmetrie des Anfangs- und Endzustands bezüglich der Vertauschung identischer Bosonen auf 5 linear unabhängige Übergangsmatrixelemente eingeschränkt.

Jacob und Wick ³⁴⁾ zeigen durch die Entwicklung der Helizitätsamplituden für den Streuprozess $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ von Teilchen mit Spin $s_1, s_2, \dots$ nach Partialwellen, daß aus der Invarianz der S-Matrix gegenüber dem unitären Operator P der Paritätstransformation

$$P^+ S P = S \quad (3.2)$$

für die Helizitätsamplituden (3.1) folgt

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) = M_{-\lambda_1 -\lambda_2 -\lambda_3 -\lambda_4}(s, t, u). \quad (3.3)$$

Die S-Matrix ist zudem invariant gegenüber dem anti-unitären Operator der Zeitumkehr T

$$T^+ S^+ T = S. \quad (3.4)$$

Daraus folgt für die Helizitätsamplituden

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) = M_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2}(s, t, u). \quad (3.5)$$

Da es sich ferner um die elastische Streuung identischer Bosonen handelt, müssen Anfangs- und Endzustand symmetrisch gegenüber der Permutation sein, die die Teilchen eines 2-Teilchen-Systems miteinander vertauscht. Für die Helizitätsamplituden erfordert das

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) = M_{\lambda_2 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_3}(s, t, u). \quad (3.6)$$

Die Identität (3.3) reduziert die 16 Amplituden auf 8, (3.5) und (3.6) schränken sie auf jeweils 10 unabhängige Amplituden ein. Es verbleiben insgesamt 5 linear unabhängige Amplituden der Photon-Photon-Streuung, wenn man alle Symmetrieoperationen gleichzeitig ausnutzt.

Als die 5 Basisamplituden können beispielsweise gewählt werden für die Streuung zirkular polarisierter Photonen

$$M_{++++}, M_{++--}, M_{+--+}, M_{+---}, M_{+++-} \quad (3.7)$$

und für die Streuung linear polarisierter Photonen

$$M_{1111}, M_{1122}, M_{1212}, M_{1221}, M_{2222}. \quad (3.8)$$

Wegen (2.14) können die Amplituden linearer Polarisation als Linearkombinationen der Helizitätsamplituden angegeben werden und umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} M_{1111} \\ M_{1122} \\ M_{1212} \\ M_{1221} \\ M_{2222} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{++++} \\ M_{++--} \\ M_{+-+-} \\ M_{+--+} \\ M_{+++-} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Die inversen Beziehungen lauten:

$$\begin{pmatrix} M_{++++} \\ M_{++--} \\ M_{+-+-} \\ M_{+--+} \\ M_{+++-} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{1111} \\ M_{1122} \\ M_{1212} \\ M_{1221} \\ M_{2222} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Die übrigen Streuamplituden lassen sich durch die 5 vorgegebenen Basisamplituden ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 M_{++++} &= M_{----} ; M_{++--} = M_{--++} \\
 M_{+-+-} &= M_{-+-+} ; M_{+---} = M_{-+--} \\
 M_{+++-} &= M_{++-+} = M_{+-++} = M_{-+++} \\
 &= M_{----+} = M_{---+-} = M_{-+--} = M_{+----}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die entsprechenden Relationen zwischen den Amplituden der Streuung linear polarisierter Photonen sind

$$\begin{aligned}
 M_{1122} &= M_{2211} ; M_{1212} = M_{2121} ; M_{1221} = M_{2112} \\
 M_{1222} &= M_{2122} = M_{2212} = M_{2221} \\
 &= M_{1112} = M_{1121} = M_{1211} = M_{2111} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Eine weitere Vereinfachung, die die Berechnung von nur 3 der 5 Helizitätsamplituden notwendig macht, ergibt sich aus dem Substitutionsgesetz: Die physikalischen Werte der Streuamplituden in den 3 Reaktionskanälen (2.9) sind Randwerte ein und derselben analytischen Funktion. Wegen der Crossing-Relationen für M_{++++}

$$\begin{aligned}
 M_{++++}(s, t, u) &= M_{++++}(s, u, t) \\
 M_{++++}(t, s, u) &= M_{+--+}(s, t, u) \\
 M_{++++}(u, t, s) &= M_{+--+}(s, t, u)
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

gehen die Amplituden M_{+-+} , M_{+--} durch eine Vertauschung der Mandelstam-Variablen aus M_{+++} hervor.

Anwendung der Kreuzungssymmetrie auf M_{+-+} und M_{+--} zeigt in Verbindung mit den Identitäten (3.11), daß diese Amplituden vollständig symmetrisch in s , t , u sind.

Der differentielle Streuquerschnitt für die Streuung von Photonen mit definierter Polarisierung ist im CM-System

$$\frac{d\sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \tau_0^2 \frac{m^2}{s} \left| M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s, t, u) \right|^2 \quad (3.14)$$

$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx (137)^{-1}$ ist die Feinstrukturkonstante, $\tau_0 = \frac{\alpha}{m} \approx 2.8 f$ der klassische Elektronenradius und m die Elektronenmasse.

Durch Mittelung über die 4 Polarisationskonfigurationen im Anfangszustand und Summation über die im Endzustand gewinnt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Streuung unpolarisierter Photonen im CM-System

$$\frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \tau_0^2 \frac{m^2}{s} \frac{1}{4} \sum_{(\lambda)} \left| M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s, t, u) \right|^2 \quad (3.15)$$

Die Summe über die 16 Quadrupel $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ erstreckt sich nur auf die Indizes der 5 Basisamplituden, wenn man jede Übergangswahrscheinlichkeit mit einem statistischen Gewicht versieht, das der Vielfachheit der betreffenden Amplitude entspricht. Ausgehend von den Streuamplituden zirkularer bzw. linearer Polarisierung erhält man die beiden äquivalenten Formeln

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \sum_{(\lambda)} \left| M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s, t, u) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left| M_{++++} \right|^2 + \left| M_{+--+} \right|^2 + \left| M_{-++-} \right|^2 + \left| M_{-+--} \right|^2 + 4 \left| M_{+++-} \right|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left| M_{1111} \right|^2 + 2 \left| M_{1122} \right|^2 + 2 \left| M_{1212} \right|^2 + 2 \left| M_{1221} \right|^2 + \left| M_{2222} \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

4. Der Vakuumpolarisationstensor 4. Stufe

Die bestimmende Größe für die Photon-Photon-Streuung durch Wechselwirkung von 4 elektromagnetischen Feldern mit dem Elektron-Positron-Vakuum ist der Vakuumpolarisationstensor (VPT) 4. Stufe $\overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, \dots, k_4)$.

Sein Zusammenhang mit der invarianten Streuamplitude (3.1) ist

$$M_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}(s, t, u) = \varepsilon_{1\mu}^{(\lambda_1)} \varepsilon_{2\nu}^{(\lambda_2)} \varepsilon_{3\lambda}^{(\lambda_3)*} \varepsilon_{4\sigma}^{(\lambda_4)*} \overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, \dots, k_4). \quad (4.1)$$

Der VPT besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) Wegen (2.1) ist er eine Funktion von 3 Photonenimpulsen k_i .
- (2) Er ist symmetrisch hinsichtlich einer simultanen Vertauschung der Tensorindizes und Argumente.
- (3) Die Invarianz der QED gegenüber Eichtransformationen 2. Art erfordert

$$k_{1\mu} \overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, \dots, k_4) = k_{2\nu} \overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\sigma}(k_1, \dots, k_4) = \dots = 0. \quad (4.2)$$

In der Störungsentwicklung der S-Matrix nach Potenzen der Feinstrukturkonstante α ergeben in niedrigster Näherung die folgenden 6 Feynman-Graphen von 4. Ordnung in der Kopplungskonstanten e einen nicht verschwindenden Beitrag zur Photon-Photon-Streuung:

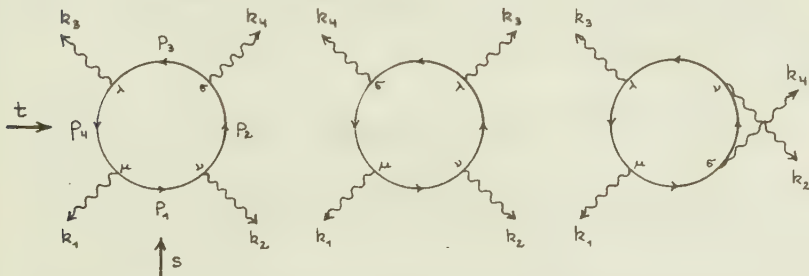


Fig. 4: Feynman-Graphen der Photon-Photon-Streuung in der Ordnung e^4

Die übrigen 3 Graphen gehen aus den gezeichneten jeweils durch Ladungskonjugation hervor, die eine Umkehrung der Pfeilrichtung innerhalb der geschlossenen Fermionschleife bewirkt. Nach dem Furry-Theorem sind wegen der Erhaltung der Ladungsparität die Beiträge der Diagramme in Fig.4 zum VPT und die der ladungskonjugierten Diagramme paarweise gleich, so daß man sie mit einem Faktor 2 berücksichtigen und sich auf die Graphen in Fig.4 beschränken kann, aus denen sich der VPT in der Ordnung e^4 additiv zusammensetzt

$$\overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\epsilon}^{(4)}(1234) = \overline{T}_{\mu\nu\lambda\epsilon}(1234) + \overline{T}_{\mu\nu\epsilon\lambda}(1243) + \overline{T}_{\mu\epsilon\lambda\nu}(1432) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \overline{T}_{\mu\nu\lambda\epsilon}(1234) = & \frac{1}{4\pi^2 i} \int d^4 p \frac{1}{\prod_{i=1}^4 [\rho_i^2 - m^2 + i\epsilon]} \\ & \times \text{Sp} \{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_2 + m) \gamma_\epsilon (\not{p}_3 + m) \gamma_\lambda (\not{p}_4 + m) \}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hierbei ist außer der Energie-Impuls-Erhaltung (2.1) für den Gesamtprozeß Erhaltung des 4-Impulses an jedem Vertex zu berücksichtigen.

Das Integral (4.4) ist ultraviolett-divergent. Die logarithmischen Divergenzen der Summanden in (4.3) kompensieren sich jedoch gerade, so daß $\overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\epsilon}^{(4)}$ die eingangs erwähnten Eigenschaften besitzt und insbesondere eich-invariant ist.

Die Streuamplitude niedrigster Näherung ist gemäß (4.1)

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(4)}(s, t, u) = \epsilon_{1\mu}^{(\lambda_1)} \epsilon_{2\nu}^{(\lambda_2)} \epsilon_{3\lambda}^{(\lambda_3)*} \epsilon_{4\epsilon}^{(\lambda_4)*} \overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\epsilon}^{(4)}(1234). \quad (4.5)$$

Analog wird der Streuquerschnitt in dieser Ordnung bezeichnet.

Im Bereich von Photonenenergien $\omega = \sqrt{s} \lesssim m$ genügt es, zur Beschreibung der Streuung von Licht an Licht nur die niedrigste Ordnung in der Störungsentwicklung heranzuziehen. Wegen der Kleinheit der Kopplungskonstanten α der elektromagnetischen Wechselwirkung ist der Einfluß der Strahlungskorrekturen bei Energien unterhalb und im Bereich der Schwelle für die Erzeugung eines reellen Elektron-Positron-Paares vernachlässigbar klein.

Dieses Argument kann nicht mehr gelten, wenn mit ansteigender Einfallensenergie Terme höherer Ordnung in der Störungsreihe zunehmend bedeutsam werden.

Cheng und Wu ³⁵⁾ haben in einer Untersuchung des Hochenergieverhaltens aller elastischen 2-Teilchen-Streuungsprozesse der QED gezeigt, daß für die Photon-Photon-Streuung einschließlich der Ordnung e^8 die Diagramme in Fig.5 bei asymptotisch hohen Energien dominieren. Alle Graphen gleicher oder niedrigerer störungstheoretischer Ordnung werden in der Grenze $s \rightarrow \infty$ um einen Faktor der Größenordnung s unterdrückt. Näheres dazu ist im Abschnitt 9 ausgeführt.

Der Beitrag der Diagramme in Fig.5 einschließlich der ladungskonjugierten ist unter Verwendung des VPT (4.3) gegeben durch den VPT in der Ordnung e^8

$$\overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(8)}(1234) = 2\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int d^4q \frac{\overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\rho}^{(4)}(k_1 q k_3 q') \cdot \overline{\Pi}_{\sigma\nu\rho\sigma}^{(4)}(-q k_2 - q' k_4)}{(q^2 + i\epsilon) \cdot (q'^2 + i\epsilon)} \quad (4.6)$$

Wiederum ist außer der globalen Energie-Impuls-Erhaltung der 4-Impuls an jedem Vertex erhalten.

Die Diagramme der Fig.5 legen folgende anschauliche Beschreibung der Streuung von Licht an Licht nahe: Beide Photonen erscheinen intermediär als virtuelle oder reelle e^-e^+ -Paare, die aneinander gestreut werden durch einen 2-Photonen-Austausch. Diagramme mit Übergang nur eines Photons zwischen beiden Fermionschleifen ergeben auf Grund des Furry-Theorems keinen Beitrag.

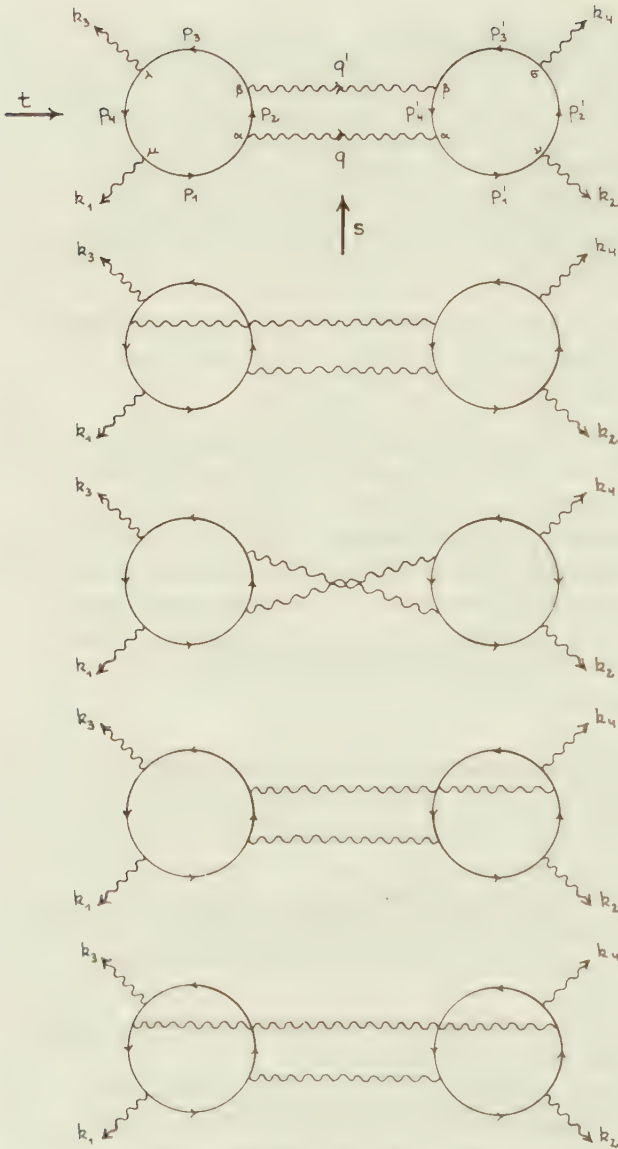


Fig.5: Feynman-Diagramme der Photon-Photon-Streuung
in der Ordnung e^8

Die Streuamplitude 8. Ordnung zu den Diagrammen in Fig.5 ist

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(8)}(s, t, u) = \varepsilon_{1\mu}^{(\lambda_1)} \varepsilon_{2\nu}^{(\lambda_2)} \varepsilon_{3\lambda}^{(\lambda_3)*} \varepsilon_{4\sigma}^{(\lambda_4)*} \overline{\Pi}_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(8)}(1234). \quad (4.7)$$

Der Streuquerschnitt wird ebenso mit dem oberen Index (8) versehen.

Unter Mitnahme der Streuamplitude 4. Ordnung (4.5), die in Teil B berechnet wird, und der Hochenergienäherung der Streuamplitude 8. Ordnung (4.7), deren Berechnung im Teil C folgt, beschreibt

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}(s, t, u) = M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(4)}(s, t, u) + M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(8)}(s, t, u) \quad (4.8)$$

die Streuung polarisierter Photonen bei hohen Energien. Mit (4.8) gewinnt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt (3.15) der unpolarisierten hochenergetischen Photon-Photon-Streuung.

B. Berechnung der Photon-Photon-Streuung

in der störungstheoretischen Ordnung e^4

Die Streuamplitude $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(4)}(s, t, u)$ wird durch eine einfache Dispersionsrelation im s -kanal dargestellt. Ihr absorptiver Anteil kann mittels der Cutkosky-Regeln bestimmt werden. Sein asymptotisches Verhalten erfordert eine einmalige Subtraktion der Dispersions-Relation. Die anschließende Spektral-Integration wird explizit ausgeführt und die Streuamplitude mit Hilfe von 3 transzendenten Funktionen angegeben. Schließlich werden die Helizitätsamplituden und die Streuamplituden linearer Polarisation mit ihren Spezialisierungen in Vorwärtsrichtung und ihren Hochenergie-Approximationen sowie die Wirkungsquerschnitte zusammengestellt.

5. Darstellung der Streuamplitude $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(4)}(s, t, u)$

durch eine einfache Dispersions-Relation

Die Berechnung der elastischen Streuung von Licht an Licht mit Hilfe einer einfachen Dispersions-Relation (DR) soll für den Fall durchgeführt werden, daß alle Photonen linear und senkrecht zur Streuebene polarisiert sind

$$\epsilon_1^{(1)} = \epsilon_2^{(1)} = \epsilon_3^{(1)} = \epsilon_4^{(1)} = \epsilon = (0, \underline{\epsilon}). \quad (5.1)$$

Die Streuamplitude ist in niedrigster Ordnung

$$M_{1111}^{(4)}(s, t, u) = M_{1111}^{(4)}(s, t) + M_{1111}^{(4)}(s, u) + M_{1111}^{(4)}(u, t) \quad (5.2)$$

mit der zum 1. Diagramm in Fig.4 gehörenden Partialamplitude

$$M^{(4)}(s,t) = M_{1111}^{(4)}(s,t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int d^4 p \frac{Sp}{\prod_{i=1}^4 [p_i^2 - m^2 + i\epsilon]} \quad (5.3)$$

Aus ihr gehen die Partialamplituden zu den beiden anderen Graphen durch die Ersetzungen hervor $(s,t) \rightarrow (s,u)$, $(s,t) \rightarrow (u,t)$.

Der Zähler Sp im Integranden von (5.3) ist

$$Sp = \text{Spur} \{ \epsilon(p_1 + m) \epsilon(p_2 + m) \epsilon(p_3 + m) \epsilon(p_4 + m) \}, \quad (5.4)$$

wobei wegen der Erhaltung des 4-Impulses für die p_i , $i=1\dots 4$ gilt

$$\begin{aligned} p_1 &= p, & p_3 &= p + k_1 + k_4, \\ p_2 &= p - k_2, & p_4 &= p + k_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Spur wird nach bekannten Regeln der Dirac-Algebra ausgewertet mit dem Resultat

$$\begin{aligned} Sp &= 32 (\epsilon \cdot p)^4 + 16 (\epsilon \cdot p)^2 \{ 2p^2 + 2p \cdot k_1 - p \cdot k_2 + p \cdot k_3 + 2t \} \\ &\quad + 4 \{ p^4 + 2p^2(p \cdot k_1) - p^2(p \cdot k_2) + p^2(p \cdot k_3) + 2p^2 s + 4p^2 t \\ &\quad - 2(p \cdot k_1)(p \cdot k_2) + 2(p \cdot k_1)s + 2(p \cdot k_1)t + 2(p \cdot k_3)s - 2(p \cdot k_2)t \} \\ &\quad - 32m^2 (\epsilon \cdot p)^2 - 4m^2 \{ 2p^2 + 2p \cdot k_1 - p \cdot k_2 + p \cdot k_3 + 2s + 4t \} + 4m^4 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Die analytischen Eigenschaften des Feynman-Integrals (5.3) sind in ²⁰⁾ untersucht: Für $t < 0$ ist es eine analytische Funktion der komplexen Variablen s mit Ausnahme eines Verzweigungsschnitts, der bei der Schwelle $s=m^2$ für die Erzeugung eines reellen e^-e^+ -Paares beginnt und sich längs der positiven s -Achse nach Unendlich erstreckt.

Wie die Berechnung des absorptiven Anteils der Streuamplitude im folgenden Abschnitt zeigt, steigt sie für $|s| \rightarrow \infty$ logarithmisch an. Man kann daher (5.3) für $t < 0$ als einfach subtrahierte DR im s -Kanal schreiben

$$M^{(4)}(s,t) = M^{(4)}(s_0,t) + \frac{s-s_0}{2\pi i} \int_{m^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Disc}_s M^{(4)}(s',t)}{(s'-s_0-i\epsilon)(s'-s-i\epsilon)} \quad (5.7)$$

mit der Diskontinuität der Streuamplitude

$$\begin{aligned} \text{Disc}_s M^{(4)}(s,t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \{ M^{(4)}(s+i\epsilon,t) - M^{(4)}(s-i\epsilon,t) \} \\ &= 2i \text{Im}_s M^{(4)}(s,t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

längs des Verzweigungsschnitts bzw. ihrem absorptiven Anteil $\text{Im}_s M^{(4)}(s,t)$ im s -Kanal. Den Integrationsweg zeigt Fig.6.

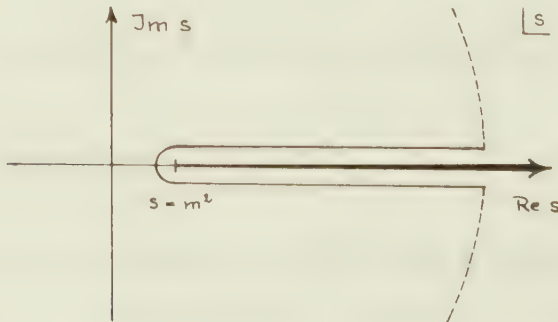


Fig.6: Singularitäten der Partialamplitude $M^{(4)}(s,t)$ und Integrationsweg in der komplexen s -Ebene

Wählt man den Subtraktionspunkt speziell an der Stelle $s_0=0$, so kann man für $M^{(4)}(0,t)$ eine Vorwärts-DR im t -Kanal hinschreiben mit dem absorptiven Anteil $\text{Im}_t M^{(4)}(0,t)$, der wegen der Symmetrie des Streuprozesses aus (5.8) durch die Vertauschung $s \leftrightarrow t$ hervorgeht

$$M^{(4)}(s,t) = \frac{t}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t - i\epsilon} \text{Im}_t M^{(4)}(0,t') + \frac{s}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s - i\epsilon} \text{Im}_s M^{(4)}(s',t) \quad (5.9)$$

Dabei ist in (5.9) ebenfalls einmal an der Stelle $t=0$ subtrahiert. Die gemeinsame unendliche Subtraktionskonstante $M^{(4)}(0,0)$ kann weggelassen werden, da die Summe dieser divergenten Beiträge von allen 3 Partialamplituden im Einklang mit der Eichinvarianz des VPT verschwindet.

6. Berechnung des absorptiven Anteils der Streuamplitude

Zur Berechnung des absorptiven Anteils der Photon-Photon-Streuamplitude (5.3) gehen wir von dem Cutkosky-Diagramm Fig. 7 aus, das in der elastischen Unitarität die Approximation durch den 2-Teilchen-Austausch im s - und t -Kanal darstellt.

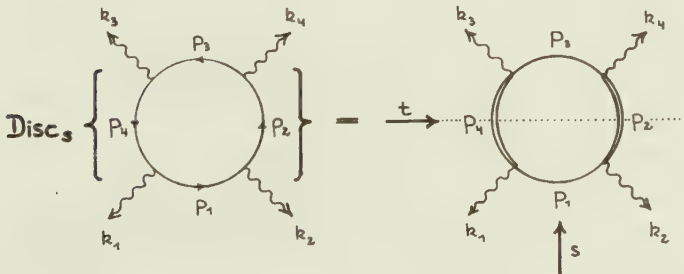


Fig.7: Zur Berechnung des absorptiven Anteils $\text{Im}_s M^{(4)}(s,t)$ der Streuamplitude im s -Kanal

$$\text{Disc}_s M^{(4)}(s,t) = \frac{(2\pi i)^2}{4\pi^2 i} \int d^4 p \frac{SP}{[p^2 - m^2 + i\epsilon][(p+k_1+k_3)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\ \times \delta_+[(p+k_1)^2 - m^2] \delta_+[(p-k_2)^2 - m^2]. \quad (6.1)$$

Die Doppellinien im Unitaritäts-Diagramm der Fig. 7 entsprechen einem reellen e^-e^+ -Paar im Zwischenzustand. An die Stelle der Propagatoren mit den Impulsen p_2, p_4 treten die δ_+ -Funktionen³⁶⁾, die gerade die Bedingungen repräsentieren, daß diese Impulse auf der Massenschale liegen, wobei man nur die Argumente zu positivem Vorzeichen der Energie zu nehmen hat

$$\left. \begin{aligned} p_2^2 &= (p-k_2)^2 = m^2 \\ p_4^2 &= (p+k_1)^2 = m^2 \end{aligned} \right\} -p \cdot k_1 = p \cdot k_2 = \frac{1}{2} (p^2 - m^2). \quad (6.2)$$

Mit diesen Einschränkungen reduziert sich die Spur (5.6) auf

$$SP_{24} = 2 [p^2 - m^2] [(p+k_1+k_3)^2 - m^2] \\ + 4s [p^2 - m^2] + 4s [(p+k_1+k_3)^2 - m^2] \\ + 8(\epsilon \cdot p)^2 [p^2 - m^2] + 8(\epsilon \cdot p)^2 [(p+k_1+k_3)^2 - m^2] \\ - 16st + 32(\epsilon \cdot p)^4. \quad (6.3)$$

Die Diskontinuität (6.1) des Feynman-Integrals bzw. der absorptive Anteil der Streuamplitude im s-Kanal ist

$$\text{Im}_s M^{(4)}(s, t) = \bar{I}_1 + 4s \cdot \bar{I}_2 + 8 \cdot \bar{I}_3 - 8st \bar{I}_4 + 16 \cdot \bar{I}_5 \quad (6.4)$$

Dabei bezeichnen $\bar{I}_1 \dots \bar{I}_5$ folgende 5 Phasenraum-Integrale, ausgedrückt durch die Größen

$$\begin{aligned} a(x) &= \left(1 - \frac{m^2}{x}\right)^{1/2}, \\ a(x, y) &= \left(1 - m^2 \frac{x+y}{xy}\right)^{1/2}, \\ \Delta(x, y) &= \left\{xy(xy - m^2x - m^2y)\right\}^{1/2}; \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \int d^4p \delta_+[(p+k_1)^2 - m^2] \delta_+[(p-k_2)^2 - m^2] \\ &= \frac{\pi}{2} a(s) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= \int d^4p \delta_+[(p+k_1)^2 - m^2] \delta_+[(p-k_2)^2 - m^2] \cdot \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= -\frac{\pi}{8} \frac{1}{s} \ln \frac{1+a(s)}{1-a(s)} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= \int d^4p \delta_+[(p+k_1)^2 - m^2] \delta_+[(p-k_2)^2 - m^2] \cdot \frac{(\epsilon \cdot p)^2}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= -\frac{1}{4} \bar{I}_1 - \frac{1}{2} m^2 \cdot \bar{I}_2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_4 &= \int d^4p \frac{\delta_+[(p+k_1)^2 - m^2] \delta_+[(p-k_2)^2 - m^2]}{[p^2 - m^2 + i\epsilon] [(p+k_1+k_3)^2 - m^2 + i\epsilon]} \\ &= \frac{\pi}{16} \frac{1}{\Delta(s, t)} \ln \frac{a(s, t) + a(s)}{a(s, t) - a(s)} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \overline{I}_5 &= \int d^4 p \frac{\delta_+ [(p+k_1)^2 - m^2] \delta_+ [(p-k_2)^2 - m^2]}{[p^2 - m^2 + i\epsilon][(p+k_1+k_3)^2 - m^2 + i\epsilon]} \cdot (\epsilon p)^4 \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{1+\frac{t}{s}} \cdot \overline{I}_1 - \frac{1}{4} \frac{1}{s} \frac{1}{(1+\frac{t}{s})^2} (2st - 3m^2s - 3m^2t) \cdot \overline{I}_2 \\ &\quad + \frac{1}{s^2} \frac{1}{(1+\frac{t}{s})^2} (st - m^2s - m^2t)^2 \cdot \overline{I}_4. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Einsetzen dieser Integrale in (6.4) und Zusammenfassung nach gleichartigen Termen ergibt für den absorptiven Anteil der Partialamplitude (5.3) im s-Kanal

$$\begin{aligned} \text{Im}_s M^{(4)}(s,t) &= \frac{\pi}{2} \frac{s-t}{s+t} a(s) \\ &\quad - \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{t-2s}{s+t} \frac{m^2}{s} - 2 \frac{st}{(s+t)^2} \right\} \ln \frac{1+a(s)}{1-a(s)} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{2m^4}{st} \left(1 - \frac{1}{m^2} \frac{st}{s+t} \right)^2 \right\} \frac{1}{a(s,t)} \ln \frac{a(s,t)+a(s)}{a(s,t)-a(s)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Sein asymptotisches Verhalten bezüglich der komplexen Variablen s

$$s^{-1} \cdot \text{Im}_s M^{(4)}(s,t) \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0 \quad (6.12)$$

erfordert die einmalige Subtraktion in der DK (5.7), um Konvergenz des Integrals über den Schnitt zu erzeugen.

Wegen der Crossing-Symmetrie des Streuprozesses ist der absorptive Anteil $\text{Im}_t M^{(4)}(s,t)$ im t-Kanal aus (6.11) durch die Vertauschung $s \leftrightarrow t$ zu erhalten. Sein Wert in der Vorwärtsrichtung $s=0$ des gekreuzten Kanals wird neben (6.11) in der Spektraldarstellung (5.9) der Streuamplitude benötigt

$$\text{Im}_t M^{(4)}(0,t) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{4m^2}{t} \right) a(t) - \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{2m^2}{t} \right) \cdot \ln \frac{1+a(t)}{1-a(t)}. \quad (6.13)$$

7. Ausführung der Spektralintegration

Die absorptiven Anteile der Streuamplitude im s-Kanal (6.11) und der Vorwärtsstreuamplitude im t-Kanal (6.13) werden in die Darstellung (5.9) der Streuamplitude als einfach subtrahierte DR eingesetzt. Durch geeignete Partialbruchzerlegungen des Integranden gelingt es, die Spektralintegration auf elementare Integrale und die Integraldarstellungen von 3 transzendenten Funktionen $B(x)$, $T(x)$, $I(x, y)$ zurückzuführen, die im Anhang zusammengestellt sind.

Eine geeignete Aufspaltung von (6.13) ist

$$\mathcal{I}m_t M^{(n)}(0, t') = -\pi \frac{m^2}{t} \frac{t' - t}{t'} \left\{ 2 a(t') - \ln \frac{1 + a(t')}{1 - a(t')} \right\} \quad (7.1)$$

$$+ \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{4m^2}{t} \right\} a(t') - \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{2m^2}{t} \right\} \ln \frac{1 + a(t')}{1 - a(t')},$$

mit der man als Beitrag vom t-Kanal erhält

$$\frac{t}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dt'}{t'} \frac{\mathcal{I}m_t M^{(n)}(0, t')}{t' - t - i\epsilon} \quad (7.2)$$

$$= \frac{2}{3} - \left\{ 1 + 4 \frac{m^2}{t} \right\} \cdot B\left(\frac{t}{m^2}\right) + \left\{ 1 + 2 \frac{m^2}{t} \right\} \cdot T\left(\frac{t}{m^2}\right).$$

Wenn $\mathcal{I}m_s M^{(4)}(s', t)$ in (5.9) eingesetzt wird, ist es zweckmäßig, von folgenden Partialbruchzerlegungen Gebrauch zu machen:

$$\frac{1}{s' - s} \frac{s' - t}{s' + t} = \frac{s - t}{s + t} \frac{1}{s' - s} + \frac{2t}{s + t} \frac{1}{s' + t}, \quad (7.3)$$

$$\frac{1}{s'} \frac{1}{s' - s} \left\{ 1 - \frac{t - 2s'}{s' + t} \frac{m^2}{s'} - 2 \frac{s't}{(s' + t)^2} \right\} \quad (7.4)$$

$$= \frac{m^2}{s} \frac{1}{s'^2} + \left\{ 1 - \frac{t - 2s}{s + t} \frac{m^2}{s} - 2 \frac{st}{(s + t)^2} \right\} \frac{1}{s'} \frac{1}{s' - s} \\ - \left\{ 3 \frac{m^2}{s + t} + 2 \frac{t^2}{(s + t)^2} \right\} \frac{1}{s'} \frac{1}{s' + t} + 2 \frac{t}{s + t} \cdot \frac{1}{(s' + t)^2} ,$$

$$\frac{1}{s'} \frac{1}{s' - s} \left\{ 1 - 2 \frac{m^4}{s't} \left(1 - \frac{1}{m^2} \frac{s't}{s' + t} \right)^2 \right\} \quad (7.5)$$

$$= 2 \frac{m^4}{st} \cdot \frac{1}{s'^2} + \left\{ 1 - 2 \frac{m^4}{st} \left(1 - \frac{1}{m^2} \frac{st}{s + t} \right)^2 \right\} \frac{1}{s'} \frac{1}{s' - s} \\ - \left\{ 4 \frac{m^2}{s + t} + 2 \frac{t^2}{(s + t)^2} \right\} \frac{1}{s'} \frac{1}{s' + t} + 2 \frac{t}{s + t} \cdot \frac{1}{(s' + t)^2} .$$

Mit diesen Partialbruchentwicklungen erhält man als Beitrag vom s-Kanal

$$\frac{s}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{ds'}{s'} \frac{\text{Im}_s M^{(4)}(s', t)}{s' - s - i\epsilon} \quad (7.6)$$

$$= -1 - \frac{s - t}{s + t} \cdot B\left(\frac{s}{m^2}\right) + \left\{ 2 \frac{s}{s + t} + 4 \frac{m^2}{t} \right\} \cdot B\left(\frac{t}{m^2}\right) \\ + \left\{ 1 - \frac{t - 2s}{s + t} \frac{m^2}{s} - \frac{2st}{(s + t)^2} \right\} \cdot \overline{1}\left(\frac{s}{m^2}\right) - \left\{ \frac{3s}{s + t} \frac{m^2}{t} + \frac{2st}{(s + t)^2} \right\} \cdot \overline{1}\left(\frac{t}{m^2}\right) \\ - \left\{ 1 - 2 \frac{m^4}{st} \left(1 - \frac{1}{m^2} \frac{st}{s + t} \right)^2 \right\} \cdot \overline{1}\left(\frac{s}{m^2}, \frac{t}{m^2}\right) .$$

Damit läßt sich die Partialamplitude (5.3) zum 1. Diagramm in Fig.4 mit Hilfe der Funktionen $B(x)$, $T(x)$, $I(x,y)$ und gebrochen rationalen Funktionen in den Mandelstam-Variablen s , t , u angeben

$$\begin{aligned}
 M_{1111}^{(4)}(s,t) = & -\frac{1}{6} - \frac{s-t}{s+t} \cdot B\left(\frac{s}{m^2}\right) \\
 & + \left\{ 1 - \frac{m^2}{s} \frac{t-2s}{s+t} - 2 \frac{st}{(s+t)^2} \right\} \cdot T\left(\frac{s}{m^2}\right) \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2 \frac{m^4}{st} \left(1 - \frac{1}{m^2} \frac{st}{s+t} \right)^2 \right\} \cdot I\left(\frac{s}{m^2}, \frac{t}{m^2}\right) \\
 & + (s \leftrightarrow t) .
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

Die Amplitude $M_{1111}^{(4)}(s,t,u)$ niedrigster Ordnung Störungstheorie für die Streuung linear, senkrecht zur Streuebene polarisierter Photonen erhält man mit (5.2).

8. Die 5 Helizitätsamplituden, Wirkungsquerschnitte

der nieder- und hochenergetischen Photon-Photon-Streuung

In den vorangehenden Abschnitten wurde die disperseionstheoretische Methode am Beispiel der Amplitude $M_{1111}^{(4)}$ erläutert, die die Streuung linear, senkrecht zur Streuebene polarisierter Photonen beschreibt. Mit den gleichen Schritten: Darstellung der Amplitude in Form einer einmal subtrahierten DR, Berechnung ihres absorptiven Anteils und anschließende Spektralintegration werden die übrigen vier unabhängigen Amplituden (3.8) der Streuung linear polarisierter Photonen berechnet.

Die 5 Helizitätsamplituden, die von De Tollis in der Mandelstam-Darstellung berechnet wurden ³²⁾, resultieren als die Linearkombinationen (3.10). Wegen der Crossing-Relationen (3.13) genügt es, die 3 Amplituden $M_{++++}^{(4)}$, $M_{++--}^{(4)}$, $M_{+-+-}^{(4)}$ anzugeben, wobei vorübergehend $m=1$ gesetzt wird.

$$\begin{aligned}
 M_{++++}^{(4)}(s, t, u) = & 1 + 2 \left\{ 1 + \frac{2t}{s} \right\} \cdot B(t) + 2 \left\{ 1 + \frac{2u}{s} \right\} \cdot B(u) \quad (8.1) \\
 & + 2 \left\{ \frac{t^2 + u^2}{s^2} - \frac{1}{s} \right\} \cdot [\overline{T}(t) + \overline{T}(u)] \\
 & - \frac{1}{t} \left\{ 1 - \frac{1}{2s} \right\} \cdot \overline{I}(s, t) - \frac{1}{u} \left\{ 1 - \frac{1}{2s} \right\} \cdot \overline{I}(s, u) \\
 & - \left\{ 2 \frac{t^2 + u^2}{s^2} - \frac{4}{s} - \frac{1}{t} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2tu} \right\} \cdot \overline{I}(t, u)
 \end{aligned}$$

$$M_{++--}^{(4)}(s, t, u) = -1 + \frac{1}{2st} \cdot \overline{I}(s, t) + \frac{1}{2su} \cdot \overline{I}(s, u) + \frac{1}{2tu} \cdot \overline{I}(t, u) \quad (8.2)$$

$$M_{+-+-}^{(4)}(s, t, u) = M_{++++}^{(4)}(u, t, s) \quad (8.3)$$

$$M_{+--+}^{(4)}(s, t, u) = M_{++++}^{(4)}(t, s, u) \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned}
 M_{+++-}^{(4)}(s, t, u) = & -1 - \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{u} \right\} \cdot [\overline{T}(s) + \overline{T}(t) + \overline{T}(u)] \\
 & + \left\{ \frac{1}{u} + \frac{1}{2st} \right\} \cdot \overline{I}(s, t) + \left\{ \frac{1}{t} + \frac{1}{2su} \right\} \cdot \overline{I}(s, u) \\
 & + \left\{ \frac{1}{s} + \frac{1}{2tu} \right\} \cdot \overline{I}(t, u) \quad (8.5)
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Amplituden bzw. ihrer Linearkombinationen (3.9) in die Gleichungen (3.14) und (3.15) findet man den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma^{(u)}/d\Omega$ der polarisierten bzw. unpolarisierten Photon-Photon-Streuung in niedrigster Ordnung der Störungstheorie.

Die im allgemeinen Fall beliebiger Photonenenergien ω und Streuwinkel ϑ erforderliche numerische Auswertung des Streuquerschnitts ist für die hier interessierende unpolarisierte Streuung im Teil D beschrieben und diskutiert.

Analytisch lassen sich folgende Grenzfälle untersuchen, die bereits charakteristische Merkmale des Streuprozesses aufzeigen:

Im Bereich niedriger Energien $\omega \ll m$, bei denen eine nichtlineare Wechselwirkung nur über virtuelle e^-e^+ -Paare zustande kommt, sind die Amplituden linearer Polarisation unter Verwendung der Reihenentwicklungen (A.27) - (A.29) für $B(x)$, $T(x)$, $I(x,y)$ bis auf Terme proportional s^3

$$\begin{aligned}
 M_{1111}^{(0)}(s,t,u) &\simeq M_{2222}^{(4)}(s,t,u) \simeq -\frac{2}{45} \left\{ \left(\frac{s}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{t}{m^2}\right)^2 + \left(\frac{u}{m^2}\right)^2 \right\} \\
 M_{1122}^{(4)}(s,t,u) &\simeq -\frac{2}{45} \left\{ -4 \left(\frac{s}{m^2}\right)^2 + 7 \left(\frac{t}{m^2}\right)^2 + 7 \left(\frac{u}{m^2}\right)^2 \right\} \\
 M_{1212}^{(4)}(s,t,u) &\simeq -\frac{2}{45} \left\{ +7 \left(\frac{s}{m^2}\right)^2 - 4 \left(\frac{t}{m^2}\right)^2 + 7 \left(\frac{u}{m^2}\right)^2 \right\} \\
 M_{1221}^{(4)}(s,t,u) &\simeq -\frac{2}{45} \left\{ +7 \left(\frac{s}{m^2}\right)^2 + 7 \left(\frac{t}{m^2}\right)^2 - 4 \left(\frac{u}{m^2}\right)^2 \right\}
 \end{aligned}
 \tag{8.6}$$

Im Einklang mit der Eichinvarianz des VPT sind die Amplituden niederenergetisch proportional zum Quadrat der

Mandelstam-Variablen ³⁷⁾. In der Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(4)}(k_1, \dots, k_4) = & \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(4)}(0) + k_\alpha k_\beta \frac{\partial^2}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(4)}(0) \\ & + k_\alpha k_\beta k_\gamma k_\delta \frac{\partial^4}{\partial k_\alpha \partial k_\beta \partial k_\gamma \partial k_\delta} \Pi_{\mu\nu\lambda\sigma}^{(4)}(0) \dots \end{aligned} \quad (8.7)$$

des VPT (4.3), die wegen Lorentz-Invarianz nur gerade Potenzen in den Photonenimpulsen enthält, verschwinden nämlich die ersten beiden Terme wegen der Transversalitäts-Eigenschaft (4.2). In erster Näherung verhält sich daher der VPT proportional der 4. Potenz in den Photonenimpulsen, d.h. quadratisch in den Mandelstam-Variablen.

Mit den Näherungen (8.6) ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der niederenergetischen unpolarisierten Photon-Photon-Streuung

$$\frac{d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}}{d\Omega}(\omega, \vartheta) = \frac{139}{90^2} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \gamma_0^2 \left(\frac{\omega}{m} \right)^6 (3 + \cos^2 \vartheta)^2, \quad \omega \ll m \quad (8.8)$$

der erstmalig von Euler und Kockel berechnet wurde ²⁹⁾: Er steigt proportional zur 6. Potenz der Einfallsenergie an. Im übrigen sind Energie- und Winkelabhängigkeit separiert, so daß das Verhältnis Vorwärts-/90°-Streuquerschnitt konstant $(4/3)^2$ beträgt unabhängig von der Einfallsenergie.

Im Energiebereich $\omega \gg m$ ist der absorptive Prozeß der Paarproduktion und damit eine Streuung über reell erzeugte e^-e^+ -Zwischenzustände möglich, die Amplituden besitzen einen von Null verschiedenen Imaginärteil.

Mit wachsender Einfallsenergie ω dominiert zunehmend die Streuung unter kleinen Winkeln nahe der Einfallsebene. Der Wirkungsquerschnitt zeigt die auch bei anderen Streuprozessen zu beobachtende Erscheinung des Vorwärts-Peaks und, da unpolarisierte Vorwärts- und Rückwärtsstreuung wegen der Nichtunterscheidbarkeit der Photonen im gestreuten Zustand identisch sind, symmetrisch zur 90° -Richtung einen Peak in Rückwärtsrichtung.

Das macht der Vergleich der Wirkungsquerschnitte für Vorwärts- und 90° -Richtung bei hohen Energien deutlich.

Die Amplituden der hochenergetischen Photon-Photon-Streuung lassen sich nicht wie im niederenergetischen Fall (8.6) für den gesamten Streuwinkelbereich in geschlossener Form angeben. Deshalb werden Vorwärts- und 90° -Streuung getrennt untersucht.

Mit den asymptotischen Entwicklungen (A.30) - (A.33) der Funktionen $B(x)$, $T(x)$, $I(x,y)$ findet man folgende Hochenergienäherungen der Streuamplituden linearer Polarisation in Vorwärtsrichtung bis auf Terme $O(s^{-1} \ln s)$:

$$M_{1111}^{(4)}(s, 0, -s) = M_{2222}^{(4)}(s, 0, -s) \\ \approx \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) \cdot \left\{ \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) - 2 \right\} + \frac{1}{4} (10 - \pi^2) - i \frac{\pi}{2} \left\{ \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) - 1 \right\},$$

$$M_{1122}^{(4)}(s, 0, -s) \approx \frac{1}{4} (2 - \pi^2) - i \frac{\pi}{2} \left\{ \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) - 3 \right\}, \quad (8.9)$$

$$M_{1212}^{(4)}(s, 0, -s) \approx \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) \cdot \left\{ \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) - 2 \right\} + \frac{1}{4} (14 - \pi^2) - i \frac{\pi}{2} \left\{ \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) - 1 \right\},$$

$$M_{1221}^{(4)}(s, 0, -s) \approx \frac{1}{4} (2 + \pi^2) + i \frac{\pi}{2} \left\{ \ln\left(\frac{4s}{m^2}\right) - 3 \right\}.$$

Während alle Amplituden Imaginärteile gleicher Größenordnung besitzen, sind die Realteile der Amplituden ohne Änderung der Polarisationskonfiguration zwischen Anfangs-Endzustand um einen Faktor $\ln^2(s)$ größer als die der Amplituden mit Wechsel der Polarisation. Das ist Ausdruck der auch von anderen Prozessen her bekannten Erscheinung, daß bei hohen Energien die Streuung ohne Spin-Umklappung überwiegt.

Die Hochenergienäherungen der Amplituden für 90° -Streuung sind bis auf Terme $O(s^{-1} \ln^2(s))$:

$$\begin{aligned} M_{1111}^{(4)}(s, -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}) &\approx \frac{1}{2} \ln 2 \{5 \ln 2 - 6\} + \frac{\pi^2}{8} - 1 - i\pi \{5 \ln 2 - 3\}, \\ M_{1122}^{(4)}(s, -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}) &\approx \frac{1}{2} \ln 2 \{5 \ln 2 - 6\} - \frac{\pi^2}{8} + 1 - i\pi \{5 \ln 2 - 3\}, \\ M_{1212}^{(4)}(s, -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}) &= M_{1221}^{(4)}(s, -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}) \approx \frac{\pi^2}{8} + 1, \\ M_{2222}^{(4)}(s, -\frac{s}{2}, -\frac{s}{2}) &\approx \frac{1}{2} \ln 2 \{5 \ln 2 - 6\} + \frac{\pi^2}{8} + 3 - i\pi \{5 \ln 2 - 3\}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Daher ist die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts der unpolarisierten Photon-Photon-Streuung in Vorwärts- und Seitwärtsrichtung bei Energien $\omega \gg m$

$$\frac{d\sigma_{unpol}^{(4)}}{d\Omega}(\omega, \vartheta) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 r_0^2 \left(\frac{m}{\omega}\right)^2 \begin{cases} \ln^2\left(\frac{\omega}{m}\right) \cdot \{\ln\left(\frac{\omega}{m}\right) + 2(2 \ln 2 - 1)\}, & \vartheta = 0^\circ \\ 1, & \vartheta = 90^\circ \end{cases} \quad (8.11)$$

Der führende Term des Vorwärtsstreuquerschnitts wurde von Achieser berechnet ³⁰⁾.

Wie (8.11) zeigt, fällt der Wirkungsquerschnitt in der Ordnung e^4 mit wachsender Energie insgesamt ab, in und nahe der Vorwärtsrichtung weniger stark als für die Weitwinkelstreuung. Die Streuung unter kleinen Winkeln überwiegt bei hohen Energien relativ zur Weitwinkelstreuung um den Faktor $\ln^4\left(\frac{\omega}{m}\right)$. Das erklärt den ausgeprägt nadel-förmigen Verlauf des Streuquerschnitts in der Umgebung der Vorwärtsrichtung bei hohen Einfallsenergien.

C. Berechnung der Photon-Photon-Streuung

in der störungstheoretischen Ordnung e^8

Die Hochenergienäherung der Streuamplitude $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(8)}(s, t, u)$ repräsentiert durch die Diagramme in Fig.5, besitzt eine von Cheng und Wu abgeleitete Stoßfaktor-Darstellung. Nach Einführung einer Feynman-Parametrisierung kann über den 2-dimensionalen transversalen, zwischen den Fermion-schleifen ausgetauschten Photonenimpuls integriert werden. Die resultierende Darstellung der Streuamplitude als 7-dimensionales Parameterintegral ist für eine numerische Auswertung geeignet. Analytisch wird es für den Sonderfall der Vorwärtsstreuung berechnet.

9. Stoßfaktor-Darstellung für die Hochenergie-

näherung der Streuamplitude $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(8)}(s, t, u)$

In einer systematischen Untersuchung aller elastischen 2-Teilchen-Streuprozesse der QED haben Cheng und Wu ³⁵⁾ den Stoßfaktor-Formalismus entwickelt: In der Störungsreihe werden unter den Termen niedriger Ordnung diejenigen aufgesucht, die bei hohen Energien dominieren. Je nach Art des betrachteten Streuprozesses $a + b \rightarrow a + b$ ist das in unterschiedlicher Ordnung der Fall. Gemeinsam ist allen Hochenergienäherungen, daß die Streuamplitude rein imaginär ist und linear mit dem Quadrat der Energie im CM-System s ansteigt. Jedem der beiden an der Streuung beteiligten Teilchen a, b kann ein Stoßfaktor g^a, g^b zugeordnet werden, wobei g^a unabhängig von Teilchen b ist und umgekehrt. Die Stoßfaktor-Darstellung der Streuamplitude bei hohen Energien ist dann

$$M_{a+b \rightarrow a+b} \sim i s \int d^2 q_{\perp} \frac{g^a(\underline{r}, q_{\perp}) \cdot g^b(\underline{r}, q_{\perp})}{(q_{\perp} + \underline{r})^2 (q_{\perp} - \underline{r})^2} \quad (9.1)$$

Die Integration erfolgt über den ausgetauschten transversalen Photonenimpuls $q_{\perp}$, und $2\underline{r}$ bezeichnet den Impulsübertrag.

Die Analogie zur nichtrelativistischen Störungstheorie ermöglicht eine graphische Beschreibung durch sog. Stoß-Diagramme³⁵⁾. Sie repräsentieren eine Hochenergienäherung, die nur mit der Energie ansteigende Terme und hier nur den führenden berücksichtigt.

Im vorliegenden Fall der Photon-Photon-Streuung sind es einschließlich der Ordnung e^8 die Diagramme in Fig.5, die das Hochenergieverhalten beherrschen. Die Amplitude $M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(n)}$ ist bei asymptotisch hohen Energien rein absorptiv, so daß die Streuung über reell erzeugte Zwischenzustände erfolgt, und steigt linear mit dem Quadrat der Photonenenergie im CM-System an. Die anderen Diagramme gleicher und niedrigerer störungstheoretischer Ordnung sind bei hohen Energien höchstens $\ln(\frac{s}{m^2})$ proportional, wie dies im Fall der Ordnung e^4 die Rechnung (8.8) für die verschiedenen Polarisationskonfigurationen gezeigt hat: Das asymptotische Verhalten ist bei Impulsübertrag $|\underline{t}| \leq m^2$ höchstens proportional $\ln(\frac{s}{m^2})$. Dieses Energieverhalten ist auch für die Selbstenergie-, Vertex- und comptonartigen Strahlungskorrekturen zur Ordnung e^4 zu erwarten, die in der Ordnung e^6 vorkommen.

Die Hochenergieapproximation der Amplitude (4.7) für den betrachteten Streuprozess $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \gamma$ ist in der Stoßfaktor-Darstellung (der Einfachheit halber wird die Bezeichnung für die Näherung beibehalten).

$$M_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4}^{(8)}(s, t) = i s \frac{1}{\pi^2} \int d^2 q_{\perp} \frac{g_{\lambda_1 \lambda_3}^{\tau}(\underline{x}, q_{\perp}) \cdot g_{\lambda_2 \lambda_4}^{\tau}(\underline{x}, q_{\perp})}{(q_{\perp} + \underline{x})^2 (q_{\perp} - \underline{x})^2} \quad (9.2)$$

Die Integration erstreckt sich auf den 2-dimensionalen, zwischen den Vakuumschleifen ausgetauschten transversalen Photonenimpuls $q_{\perp}$, $2\underline{x}$ ist der Übertrag des 3-Impulses (2.5) und $g_{\lambda\lambda'}^{\tau}(\underline{x}, q_{\perp})$ bezeichnet den Stoßfaktor des Photons

$$g_{\lambda\lambda'}^{\tau}(\underline{x}, q_{\perp}) = \frac{e^2}{\pi} \int_0^1 d\alpha d\alpha' dx dx' \delta(1-\alpha-\alpha') \delta(1-x-x') \left[\frac{8\alpha^3 \alpha' x x' r_{\lambda} r_{\lambda'} - \alpha^2 \{1-2\alpha\alpha'(x-x')^2\} \underline{x}^2 \delta_{\lambda\lambda'}}{4\alpha^2 x x' \underline{x}^2 + m^2} - \frac{8\alpha\alpha' x x' Q_{\lambda} Q_{\lambda'} - \{1-2\alpha\alpha'(x-x')^2\} \underline{Q}^2 \delta_{\lambda\lambda'}}{4 x x' \underline{Q}^2 + m^2} \right],$$

$$\underline{Q} = \frac{1}{2} \{ q_{\perp} - (\alpha - \alpha') \underline{x} \}. \quad (9.3)$$

Die Stoßfaktor-Darstellung (9.2) wurde in sog. infinite-momentum-Koordinaten auch von Chang und Ma gefunden und für den Fall erweitert, daß zwischen den Fermionschleifen n Photonen ausgetauscht werden³⁸⁾. Die Aufsummation der Multiphoton-Austausch-Diagramme liefert die gleiche, linear mit s ansteigende Stoßfaktor-Darstellung (9.2), modifiziert durch Glaubersche Eikonal-Faktoren.

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird für eine beliebige Integrationsvariable z vereinbart: $z + z' = 1$.

Nützlich sind ferner die Größen

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - 2\alpha\alpha'(x-x')^2, & B_1 &= 1 - 2\beta\beta'(y-y')^2, \\ A_2 &= 8\alpha\alpha'xx', & B_2 &= 8\beta\beta'yy', \\ A_3 &= 1 - 2\alpha\alpha', & B_3 &= 1 - 2\beta\beta', \end{aligned} \quad (9.4)$$

zwischen denen der Zusammenhang besteht

$$A_1 = A_2 + A_3, \quad B_1 = B_2 + B_3. \quad (9.5)$$

In der gewählten Geometrie (Fig.2) ist die $q_\perp$ -Ebene identisch mit der xy -Ebene. Mit den beiden die $q_\perp$ -Ebene aufspannenden Einheitsvektoren $\underline{e}_x=(1,0)$, $\underline{e}_y=(0,1)$ sind die Zähler im Integranden des Stoßfaktors (9.3)

$$\alpha^2 A_2 \frac{\tau_\lambda \tau_{\lambda'}}{m^2} - \alpha^2 A_1 \frac{\tau^2}{m^2} \delta_{\lambda\lambda'} = -\delta_{\lambda\lambda'} \frac{1}{4} \tau \alpha^2 \begin{cases} A_1, & \lambda=\lambda'=1 \\ A_3, & \lambda=\lambda'=2 \end{cases} \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} A_2 \frac{Q_\lambda Q_{\lambda'}}{m^2} - A_1 \frac{Q^2}{m^2} \delta_{\lambda\lambda'} \\ = -\delta_{\lambda\lambda'} \frac{1}{4} \frac{1}{m^2} \begin{cases} A_1 [\{q_\perp - (\alpha - \alpha')\tau\} \underline{e}_x]^2 + A_3 [q_\perp \underline{e}_y]^2, & \lambda=\lambda'=1 \\ A_3 [\{q_\perp - (\alpha - \alpha')\tau\} \underline{e}_x]^2 + A_1 [q_\perp \underline{e}_y]^2, & \lambda=\lambda'=2. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Dabei ist $\tau = \left(\frac{2x}{m}\right)^2 = -4\frac{\hbar^2}{m^2}$ das Quadrat des (auf die Elektronenmasse m als Maßstab bezogenen) Impulsübertrags. Das (9.6) und (9.7) gemeinsame Kronecker-Symbol zeigt an, daß der Stoßfaktor verschwindet, falls die lineare Polarisation von ein- und auslaufendem Photon verschieden ist.

Nachdem man die beiden Terme im Integranden von (9.3) auf Hauptnenner gebracht hat, ist der Photon-Stoßfaktor für die Polarisationskonfiguration senkrecht ($\lambda = \lambda' = 1$) bzw. parallel ($\lambda = \lambda' = 2$) zur Streuebene

$$g_{22}^{\tau}(\tau, q_{\perp}) = -\frac{e^2}{4\pi} \int_0^1 d\alpha dx \frac{Z_{22}(\alpha, x; q_{\perp})}{(1 + \alpha^2 x x' \tau) (1 + x x' \frac{4Q^2}{m^2})} \quad (9.8)$$

mit dem Zähler

$$Z_{11}(\alpha, x; q_{\perp}) = \alpha^2 A_1 \tau \left(1 + x x' \frac{1}{m^2} [q_{\perp} - (\alpha - \alpha') \tau]^2\right) - (1 + \alpha^2 x x' \tau) \frac{1}{m^2} \left(A_1 [(q_{\perp} - (\alpha - \alpha') \tau) \underline{e}_x]^2 + A_3 [q_{\perp} \underline{e}_y]^2\right) \quad (9.9)$$

Aus (9.9) geht $Z_{22}(\alpha, x; q_{\perp})$ durch die Vertauschung $A_1 \leftrightarrow A_3$ hervor, die für A_2 einen Vorzeichenwechsel bedeutet. Die 3 unabhängigen, bei hohen Energien dominierenden Photon-Photon-Streuamplituden linearer Polarisation in der Ordnung e^8 sind also

$$\left. \begin{matrix} M_{1111}^{(8)}(s, t) \\ M_{1212}^{(8)}(s, t) \\ M_{2222}^{(8)}(s, t) \end{matrix} \right\} = i s \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \int_0^1 d\alpha dx d\beta d\gamma \frac{1}{(1 + \alpha^2 x x' \tau) (1 + \beta^2 \gamma \gamma' \tau)} \left\{ \begin{matrix} I_{1111} \\ I_{1212} \\ I_{2222} \end{matrix} \right. \quad (9.10)$$

mit den von den Parametern α, x, β, γ abhängenden Integranden

$$\left\{ \begin{matrix} I_{1111} \\ I_{1212} \\ I_{2222} \end{matrix} \right\} = \int d^2 q_{\perp} \frac{1}{(q_{\perp} + \tau)^2 (q_{\perp} - \tau)^2 (1 + x x' \frac{4Q^2}{m^2}) (1 + \gamma \gamma' \frac{4Q^2}{m^2})} \left\{ \begin{matrix} Z_{11}(\alpha, x; q_{\perp}) Z_{11}(\beta, \gamma; q_{\perp}) \\ Z_{11}(\alpha, x; q_{\perp}) Z_{22}(\beta, \gamma; q_{\perp}) \\ Z_{22}(\alpha, x; q_{\perp}) Z_{22}(\beta, \gamma; q_{\perp}) \end{matrix} \right. \quad (9.11)$$

Der Vergleich mit (8.9) zeigt, daß dies die Streuamplituden mit der gleichen Polarisationskonfiguration sind, die auch in der Ordnung e^4 dominieren, da sie nahe der Vorwärtsrichtung einen mit $\ln^2(\frac{s}{m^2})$ ansteigenden dispersiven Anteil aufweisen.

10. Integration über den transversalen Photonenimpuls

Es ist möglich, in (9.11) die 2-dimensionale Integration über den transversalen Photonenimpuls $\underline{q}_\perp = (q_{\perp 1}, q_{\perp 2})$ direkt auszuführen etwa durch Residuen-Integration in der komplexen $q_{\perp 1}$ -Ebene und anschließende Integration über die in der komplexen $q_{\perp 2}$ -Ebene lokalisierten Schnitte des Integranden. Dieser Weg führte jedoch nicht zu brauchbaren Resultaten: Zum einen sind die erhaltenen Ausdrücke derart umfangreich und von komplizierter, weitgehend unsymmetrischer Struktur in den restlichen Variablen, daß keine Aussicht besteht, die verbleibenden 4 Parameter-Integrationen analytisch bewältigen zu können. Zum anderen weist der Integrand zahlreiche, durch wiederholte Partialbruchzerlegungen bedingte Scheinsingularitäten im Innern des Integrationsgebietes E_4 (4-dimensionaler Einheitskubus) auf, die eine numerische Behandlung erschweren.

Daher wurde der Weg gewählt, 3 weitere Parameter-Integrationen einzuführen, die es gestatten, die $\underline{q}_\perp$ -Integration auszuführen mit dem Resultat, daß der Integrand keine Scheinsingularitäten im Innern des Integrationsgebietes E_7 besitzt.

Dazu werden nach der bekannten Feynmanschen Methode die 4 von $\underline{q}_\perp$ abhängenden Nenner im Integranden von (9.11)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{m^2} [\underline{q}_\perp + \underline{r}]^2 \\ a_2 &= \frac{1}{m^2} [\underline{q}_\perp - \underline{r}]^2 \\ a_3 &= 1 + \alpha\alpha' \frac{1}{m^2} [\underline{q}_\perp - (\alpha - \alpha') \underline{r}]^2 \\ a_4 &= 1 + \gamma\gamma' \frac{1}{m^2} [\underline{q}_\perp - (\beta - \beta') \underline{r}]^2 \end{aligned} \tag{10.1}$$

mit Hilfe von 3 Parameter-Integralen über u_1, u_2, u_3 zu

einem Nenner kombiniert, nämlich der 4. Potenz von

$$N(\underline{q}_\perp) = (a_1 - a_2) u_1 u_2 u_3 + (a_2 - a_3) u_1 u_2 + (a_3 - a_4) u_1 + a_4. \quad (10.2)$$

Die Feynman-Parametrisierung ist damit

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3 a_4} = 3! \int_0^1 du_1 u_1^2 \int_0^1 du_2 u_2 \int_0^1 du_3 \frac{1}{N^4(\underline{q}_\perp)}. \quad (10.3)$$

Die auftretenden Differenzen der Nenner (10.1) sind

$$a_1 - a_2 = 4 \frac{1}{m^2} \underline{\tau} \cdot \underline{q}_\perp, \quad (10.4)$$

$$a_2 - a_3 = \frac{1}{m^2} \{1 - x x'\} q_\perp^2 - 2 \frac{1}{m^2} \{1 - (\alpha - \alpha') x x'\} \underline{\tau} \cdot \underline{q}_\perp + \frac{1}{4} \{1 - (\alpha - \alpha')^2 x x'\} \tau - 1,$$

$$a_3 - a_4 = \frac{1}{m^2} \{x x' - \gamma \gamma'\} q_\perp^2 - 2 \frac{1}{m^2} \{(\alpha - \alpha') x x' - (\beta - \beta') \gamma \gamma'\} \underline{\tau} \cdot \underline{q}_\perp + \frac{1}{4} \{(\alpha - \alpha')^2 x x' + (\beta - \beta')^2 \gamma \gamma'\} \tau,$$

$$a_4 = \frac{1}{m^2} \gamma \gamma' q_\perp^2 - 2 \frac{1}{m^2} (\beta - \beta') \gamma \gamma' \underline{\tau} \cdot \underline{q}_\perp + \frac{1}{4} (\beta - \beta')^2 \gamma \gamma' \tau + 1.$$

Damit kann $N(\underline{q}_\perp)$ in folgende Form gebracht werden:

$$N(\underline{q}_\perp) = \frac{1}{c_1} \left[\frac{1}{m^2} [c_1 q_\perp^2 + c_4 \underline{\tau}]^2 + c_0(\tau) \right]. \quad (10.5)$$

Hierbei sind die c_i , $i=0 \dots 4$ definiert als

$$c_0 = \frac{1}{4} \{c_1 c_2 - c_4^2\} \tau + c_1 c_3,$$

$$c_1 = u_1 u_2 + \alpha \alpha' u_1 u_2' + \gamma \gamma' u_1',$$

$$c_2 = u_1 u_2 + (\alpha - \alpha')^2 \alpha \alpha' u_1 u_2' + (\beta - \beta')^2 \gamma \gamma' u_1', \quad (10.6)$$

$$c_3 = 1 - u_1 u_2$$

$$c_4 = u_1 u_2 (u_3 - u_3') - (\alpha - \alpha') \alpha \alpha' u_1 u_2' - (\beta - \beta') \gamma \gamma' u_1'.$$

Die c_i , $i=0 \dots 3$ sind positiv semidefinit: $c_i \geq 0$ und verschwinden höchstens auf dem Rand ihres Definitionsbereichs.

Die Feynman-Parametrisierung (10.3) wird in die Integrale (9.11) eingesetzt und die Reihenfolge der Integrationen über u_i , $i=1,2,3$ und $q_\perp$ vertauscht.

Bevor nun die $q_\perp$ -Integration ausgeführt wird, ist es notwendig, $N(q_\perp)$ zu diagonalisieren, d.h. $N(q_\perp)$ wird hinsichtlich seiner $q_\perp$ -Abhängigkeit in eine quadratische Form überführt, so daß das Skalarprodukt $\underline{r} \cdot \underline{q}_\perp$ eliminiert werden kann. Dies wird durch eine Verschiebung des Koordinatenursprungs der $q_\perp$ -Ebene erreicht. Die Translation ist für höchstens logarithmisch divergente Integrale erlaubt.

(10.5) läßt unmittelbar erkennen, daß

$$\underline{q}_\perp' = \underline{q}_\perp + \frac{c_4}{c_1} \underline{r} \quad (10.7)$$

das Gewünschte leistet ($\underline{r} \cdot \underline{q}_\perp' = 0$) und N nur noch von $q_\perp' = |\underline{q}_\perp'|$ abhängt

$$N(q_\perp') = \frac{1}{c_1} \left[c_1^2 \left(\frac{q_\perp'}{m} \right)^2 + c_0(\tau) \right]. \quad (10.8)$$

Die Translation im Zähler (9.9) des Stoßfaktors ergibt

$$\begin{aligned} c_1^2 \cdot Z_{11}(\alpha, x; q_\perp') = & \alpha^2 A_1 \tau \left(c_1^2 + x x' \frac{1}{m^2} [c_1 q_\perp' - \{(\alpha - \alpha') c_1 + c_4\} \tau] \right)^2 \\ & - (1 + \alpha^2 x x' \tau) \frac{1}{m^2} \left(A_1 [(c_1 q_\perp' - \{(\alpha - \alpha') c_1 + c_4\} \tau) \cdot \underline{e}_x]^2 \right. \\ & \left. + A_3 c_1^2 [q_\perp' \cdot \underline{e}_y]^2 \right) \quad (10.9) \end{aligned}$$

bzw. nach Übergang zu ebenen Polarkoordinaten $q_\perp' = (q_\perp', \varphi)$

$$\begin{aligned} c_1^2 \cdot Z_{11}(\alpha, x; q_\perp', \varphi) = & - [A_1 - (1 + \alpha^2 x x' \tau) A_2 \sin^2 \varphi] c_1^2 \left(\frac{q_\perp'}{m} \right)^2 \\ & + A_1 \{(\alpha - \alpha') c_1 + c_4\} c_1 \tau^{1/2} \left(\frac{q_\perp'}{m} \right) \cos \varphi \\ & + \frac{1}{4} A_1 [(2 \alpha c_1)^2 - \{(\alpha - \alpha') c_1 + c_4\}^2] \tau. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Der Zähler des 2. in (9.11) enthaltenen Stoßfaktors ist

$$\begin{aligned} c_1^2 \cdot Z_{11}(\beta, \gamma; q_\perp', \varphi) = & - [B_1 - (1 + \beta^2 \gamma \gamma' \tau) B_2 \sin^2 \varphi] c_1^2 \left(\frac{q_\perp'}{m} \right)^2 \\ & + B_1 \{(\beta - \beta') c_1 + c_4\} c_1 \tau^{1/2} \left(\frac{q_\perp'}{m} \right) \cos \varphi \\ & + \frac{1}{4} B_1 [(2 \beta c_1)^2 - \{(\beta - \beta') c_1 + c_4\}^2] \tau. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Die Integrale (9.11) sind also in der parametrisierten, für die Integration über den transversalen Impuls $q_\perp = (q_\perp, \varphi)$ vorbereiteten Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \bar{I}_{1111} \\ \bar{I}_{1212} \\ \bar{I}_{2222} \end{aligned} \right\} = \frac{3!}{m^4} \int_0^1 du_1 du_2 du_3 u_1^2 u_2 \int_0^\infty dq_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{q_\perp}{N^4(q_\perp)} \left\{ \begin{aligned} &Z_{11}(\alpha, x; q_\perp, \varphi) \cdot Z_{11}(\beta, \gamma; q_\perp, \varphi) \\ &Z_{11}(\alpha, x; q_\perp, \varphi) \cdot Z_{22}(\beta, \gamma; q_\perp, \varphi) \\ &Z_{22}(\alpha, x; q_\perp, \varphi) \cdot Z_{22}(\beta, \gamma; q_\perp, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Den Zähler $Z_{22}(\alpha, x, q_\perp, \varphi)$ erhält man aus (10.10) durch die Ersetzungen: $A_1 \rightarrow A_3$, $A_2 \rightarrow -A_2$, den Zähler $Z_{22}(\beta, \gamma; q_\perp, \varphi)$ aus (10.11) durch den Übergang: $B_1 \rightarrow B_3$, $B_2 \rightarrow -B_2$. Deshalb genügt es, für die q -Integration $\bar{I}_{1111}$ zu betrachten.

Weil in (10.12) nur der Zähler von φ abhängt, kann man die Winkelintegration sofort ausführen. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} n_1 &= 1 + \alpha^2 x x' \tau, & k_1 &= (\alpha - \alpha') c_1 + c_4, \\ n_2 &= 1 + \beta^2 \gamma \gamma' \tau, & k_2 &= (\beta - \beta') c_1 + c_4 \end{aligned} \quad (10.13)$$

erhält man

$$\begin{aligned} c_1^4 \cdot Z_{11}(\alpha, x; q_\perp) \cdot Z_{11}(\beta, \gamma; q_\perp) &= c_1^4 \int_0^{2\pi} d\varphi Z_{11}(\alpha, x; q_\perp, \varphi) \cdot Z_{11}(\beta, \gamma; q_\perp, \varphi) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[8 A_1 B_1 - 4 \{ n_1 A_2 B_1 + n_2 A_1 B_2 \} + 3 n_1 n_2 A_2 B_2 \right] c_1^4 \left(\frac{q_\perp}{m} \right)^4 \\ &\quad - \frac{\pi}{4} \left[\{ 2 A_1 - n_1 A_2 \} B_1 \{ (2 \beta c_1)^2 - k_2^2 \} + \{ 2 B_1 - n_2 B_2 \} A_1 \{ (2 \alpha c_1)^2 - k_1^2 \} \right. \\ &\quad \left. - 4 A_1 B_1 k_1 k_2 \right] c_1^2 \tau \left(\frac{q_\perp}{m} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\pi}{8} A_1 B_1 \{ (2 \alpha c_1)^2 - k_1^2 \} \{ (2 \beta c_1)^2 - k_2^2 \} \tau^2. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Für die radiale Integration werden die folgenden 3
Integrale bereitgestellt:

$$\int_0^{\infty} dq_{\perp} \frac{q_{\perp}}{N^4(q_{\perp})} \left[1; \left(\frac{q_{\perp}}{m}\right)^2; \left(\frac{q_{\perp}}{m}\right)^4 \right] = \frac{1}{2} m^2 c_1^4 \int_0^{\infty} dq_{\perp} \frac{1}{(c_1^2 q_{\perp}^2 + c_0^2)^4} \left[1; q_{\perp}^2; q_{\perp}^4 \right]$$

$$= \frac{1}{6} m^2 \frac{c_1^2}{c_0^3} ; \frac{1}{12} m^2 \frac{1}{c_0^2} ; \frac{1}{6} m^2 \frac{1}{c_0 c_1^2} .$$

(10.15)

Mit den Abkürzungen

$$K_1 = 2 \left[8 A_1 B_1 - 4 \{ n_1 A_2 B_1 + n_2 A_1 B_2 \} + 3 n_1 n_2 A_2 B_2 \right] c_0^2 ,$$

$$K_2 = - \left[\{ 2 A_1 - n_1 A_2 \} B_1 \{ (2 \beta c_1)^2 - k_2^2 \} + \{ 2 B_1 - n_2 B_2 \} A_1 \{ (2 \alpha c_1)^2 - k_1^2 \} \right. \\ \left. - 4 A_1 B_1 k_1 k_2 \right] c_0 \tau$$

$$K_3 = A_1 B_1 \{ (2 \alpha c_1)^2 - k_1^2 \} \{ (2 \beta c_1)^2 - k_2^2 \} \tau^2 \quad (10.16)$$

erhält man zunächst für das Integral I_{1111}

$$I_{1111} = \frac{\pi}{8} \frac{1}{m^2} \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \frac{u_1^2 u_2}{c_0^3 c_1^2} \left[K_1 + K_2 + K_3 \right] \quad (10.17)$$

und für die Streuamplitude (9.10) schließlich

$$M_{1111}^{(8)}(s, t) = i \frac{\pi}{8} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{s}{m^2} \int_0^1 d\alpha d\beta d\gamma du_1 du_2 du_3$$

$$\times \frac{1}{n_1 n_2 c_0^3 c_1^2} \left[K_1 + K_2 + K_3 \right]. \quad (10.18)$$

Aus (10.18) gehen die beiden anderen Streuamplituden linearer Polarisation hervor, indem man in den Größen K_i , $i=1,2,3$ Substitutionen vornimmt, und zwar für

$$M_{12,12}^{(8)} : (B_1, B_2, B_3) \longrightarrow (B_1, -B_2, B_3), \quad (10.19)$$

$$M_{2222}^{(8)} : \begin{aligned} &(A_1, A_2, A_3) \longrightarrow (A_3, -A_2, A_1) \\ &(B_1, B_2, B_3) \longrightarrow (B_3, -B_2, B_1). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Das Auftreten des Faktors c_0 im Nenner von (10.18) ist dafür verantwortlich, daß der Integrand an der Stelle $t=0$ des Impulsübertrags t keine Taylor-Entwicklung zuläßt und die Amplitude in der Vorwärtsrichtung nicht analytisch in der Variablen t ist. Der physikalische Grund hierfür ist möglicherweise, daß im t -Kanal der Reaktion die Schwelle für die Erzeugung des reellen 2-Photonen-Zwischenzustands gerade am Punkt $t=0$ lokalisiert ist und deshalb mit einer nicht linear in t analytischen Abhängigkeit etwa der Form $t^p \cdot \ln^q(t)$ gerechnet werden muß, die typisch ist für Schwellenverhalten und das Öffnen eines Reaktionskanals. - Da andererseits eine analytische Lösung nahe der Vorwärtsrichtung $|t| \lesssim m^2$ bei den hier interessierenden Energien im GeV-Bereich ohnehin nur für Streuwinkel $\vartheta \ll 1$ mrad gültig wäre, wurde die Frage nach dem analytischen Verhalten der Streuamplitude im Bereich $|t| \lesssim m^2$ nicht weiter verfolgt.

Damit sind die Streuamplituden in der Ordnung e^8 in Form 7-dimensionalen Parameter-Integrale über E_7 dargestellt, die einer numerischen Auswertung zugänglich sind. Der Integrand ist eine gebrochen rationale Funktion in den 7 Integrationsvariablen und dem Impulsübertrag. Eine Untersuchung des Nenners $n_1 n_2 c_0^3 c_1^2$ zeigt, daß er keine Nullstellen im Innern seines Definitionsbereichs besitzt. Diese Eigenschaft erweist sich als entscheidender Vorteil bei der numerischen Integration von (10.18), die im Teil D erläutert wird.

Die 7 Integrationen (10.18) können analytisch gelöst werden im Sonderfall der Vorwärtsstreuung, die im folgenden Abschnitt besprochen wird.

11. Vorwärtsstreuung

In der Vorwärtsrichtung $t=0$ vereinfacht sich der Integrand von (10.18) erheblich wegen

$$\begin{aligned} n_1 &= n_2 = 1, & c_0 &= c_1 c_3, \\ K_1 &= 2 [4 \cdot A_1 B_3 + 4 \cdot A_3 B_1 + 3 \cdot A_2 B_2] c_1^2 c_3^2, & (11.1) \\ K_2 &= K_3 = 0. \end{aligned}$$

Wenn man das allen Streuamplituden gemeinsame 3-dimensionale Integral über die u_i , $i=1,2,3$ mit den in (10.6) definierten Größen c_1, c_3

$$J = \int_0^1 du_1 du_2 du_3 \frac{u_1^2 u_2}{c_1^3 c_3} = \frac{1}{2} \frac{\ln(x x')}{x x' - \gamma \gamma'} + (x \leftrightarrow \gamma) \quad (11.2)$$

abspaltet, kann man aus dem Integranden (10.17)

$$\bar{I}_{1111}^0(\alpha, x; \beta, \gamma) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{m^2} [4 \cdot A_1 B_3 + 4 \cdot A_3 B_1 + 3 \cdot A_2 B_2] \cdot J \quad (11.3)$$

der Vorwärtsstreuamplitude $M_{1111}^{(8)}(s, 0)$ die Integranden zu den übrigen Indizes durch die Substitutionen (10.19) und (10.20) gewinnen, von denen die letzte (11.3) unverändert läßt

$$\bar{I}_{1212}^0(\alpha, x; \beta, \gamma) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{m^2} [4 \cdot A_1 B_1 + 4 \cdot A_3 B_3 - 3 \cdot A_2 B_2] \cdot J,$$

$$\bar{I}_{2222}^0(\alpha, x; \beta, \gamma) = \bar{I}_{1111}^0(\alpha, x; \beta, \gamma). \quad (11.4)$$

In der Vorwärtsrichtung sind also von den 3 bei hohen Energien dominanten Streuamplituden nur 2 tatsächlich verschieden. Die beiden unabhängigen Streuprozesse sind: alle 4 Photonen senkrecht bzw. parallel zur Streuebene polarisiert sowie die Konfiguration: im Anfangs- und Endzustand je 1 Photon senkrecht, das andere parallel zur Streuebene polarisiert.

Die Hilfsgrößen A_i, B_i , $i=1,2,3$ von (9.5) werden in (11.3) bzw. (11.4) eingesetzt. Wegen

$$\int_0^1 dz dz' \delta(1-z-z') [1; zz'] = 1; \frac{1}{6} \quad (11.5)$$

sind die beiden Integrale über α und β sofort auszuführen. Unter Berücksichtigung der Symmetrie in x, y erhält man

$$\begin{aligned} \overline{I}_{1111}^0(x, y) &= \frac{\pi}{9} \frac{1}{m^2} \left[6 - (x-x')^2 - (y-y')^2 + 6xx'\gamma\gamma' \right] \frac{1}{xx'-\gamma\gamma'} \ln\left(\frac{xx'}{\gamma\gamma'}\right), \\ \overline{I}_{1212}^0(x, y) &= \frac{\pi}{18} \frac{1}{m^2} \left[13 - 3(x-x')^2 - 3(y-y')^2 - 12xx'\gamma\gamma' \right] \frac{1}{xx'-\gamma\gamma'} \ln\left(\frac{xx'}{\gamma\gamma'}\right). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Die beiden verbleibenden Integrationen über x und y löst man mit Hilfe der simultanen Substitution

$$x-x' \rightarrow x, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad y-y' \rightarrow y, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Wegen

$$xx' \rightarrow \frac{1}{4}(1-x^2); \quad \gamma\gamma' \rightarrow \frac{1}{4}(1-y^2) \quad (11.7)$$

sind die transformierten Integranden (11.6) quadratisch in den neuen Variablen

$$\left. \begin{aligned} \overline{I}_{1111}^0(x, y) \\ \overline{I}_{1212}^0(x, y) \end{aligned} \right\} = -\frac{\pi}{18} \frac{1}{m^2} \left[2(5-x^2)(5-y^2) \pm (1-x^2)(1-y^2) \right] \frac{1}{x^2-y^2} \ln \frac{1-x^2}{1-y^2}. \quad (11.8)$$

Damit reduziert sich die Integration auf die beiden Doppelintegrale (ζ : Riemannsche Zeta-Funktion)

$$\int_0^1 dx dy \frac{(1-x^2)(1-y^2)}{x^2-y^2} \ln \frac{1-x^2}{1-y^2} = -\frac{1}{4} (7\zeta(3) - 6)$$

$$\int_0^1 dx dy \frac{(5-x^2)(5-y^2)}{x^2-y^2} \ln \frac{1-x^2}{1-y^2} = -\frac{1}{4} (175\zeta(3) - 38) \quad (11.9)$$

Nach (9.10) sind die Amplituden der linear polarisierten, hochenergetischen Photon-Photon-Streuung 8. Ordnung in Vorwärtsrichtung

$$M_{1111}^{(8)}(s,0) = M_{2222}^{(8)}(s,0)$$

$$= i \frac{\pi}{72} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{s}{m^2} (357\zeta(3) - 82), \quad (11.10)$$

$$M_{1212}^{(8)}(s,0) = i \frac{\pi}{72} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{s}{m^2} (343\zeta(3) - 70).$$

Die Linearkombinationen (3.10) ergeben folgende 3 bei hohen Energien dominanten Helizitätsamplituden der Ordnung e^8 in Vorwärtsrichtung ³⁵⁾:

$$M_{++++}^{(8)}(s,0) = M_{+--+}^{(8)}(s,0) \quad (11.11)$$

$$= i \frac{\pi}{36} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{s}{m^2} (175\zeta(3) - 38),$$

$$M_{++--}^{(8)}(s,0) = i \frac{\pi}{72} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{s}{m^2} (7\zeta(3) - 6). \quad (11.12)$$

Die Streuamplitude (11.12) mit Austausch von 2 Einheiten der Helizität zwischen Anfangs- und Endzustand ist um den Faktor 143 kleiner als die ohne Änderung der Helizität.

D. Diskussion der hochenergetischen Photon-Photon-Streuung

Um den Wirkungsquerschnitt der unpolarisierten Photon-Photon-Streuung zu erhalten, werden die Streuamplituden linearer Polarisation in den Ordnungen e^4 und e^8 numerisch berechnet. Gegenüber der Streuung bei niedrigen und mittleren Photonenenergien, die von der 4. Ordnung Störungstheorie beherrscht wird, macht sich bei der hochenergetischen Streuung der Einfluß der 8. Ordnung bemerkbar. Ihr Beitrag wird analysiert und der Streuquerschnitt bei der Einfallsenegie $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ m} = 1.022 \text{ GeV}$ im Streuwinkelbereich $0 \leq \vartheta \leq 5 \text{ mrad}$ diskutiert.

12. Numerische Auswertung

Die im Folgenden beschriebenen Computer-Rechnungen wurden in FORTRAN IV an dem TR 440 des Leibniz-Rechenzentrums München durchgeführt.

In der Ordnung e^4 der unpolarisierten Photon-Photon-Streuung haben wir uns bereits in Abschnitt 8 einen Überblick verschafft für die Grenzfälle der niederenergetischen Streuung $\omega \ll m$ ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) und der hochenergetischen Streuung $\omega \gg m$ in Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) und Seitwärtsrichtung ($\vartheta = \pi/2$) anhand der analytischen Lösungen (8.8) und (8.11) für den Streuquerschnitt $d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}/d\Omega$. Im allgemeinen Fall beliebiger Photonenenergien und Streuwinkel ist eine Computer-Berechnung der Streuamplituden (8.1) - (8.5) bzw. ihrer Linearkombinationen (3.9) notwendig, um den unpolarisierten Streuquerschnitt (3.15) zu erhalten. Dabei ist es zweckmäßig, die 5 Helizitätsamplituden zu verwenden, weil sie in relativ kompakter Form durch gebrochen rationale Funktionen in den Mandelstam-Variablen sowie die 3 Funktionen $B(x)$, $T(x)$, $I(x,y)$ dargestellt sind und man programmieretechnisch die Kreuzungssymmetrien (3.13) wegen ihrer einfachen Permutationsstruktur bezüglich der

kinematischen Variablen ausnutzen kann. Um mit einfacher Rechengenauigkeit auszukommen, erfordert lediglich die Amplitude $M_{+--+}^{(4)}(s, t, u)$ wegen auftretender Kompensationen für Argumente $(t/s \cdot u) \ll 1$ die zusätzliche Entwicklung

$$M_{+--+}^{(4)}(s, t, u) = M_{++++}^{(4)}(t, s, u)$$

$$\simeq -\frac{4}{3} \frac{t}{s} [B(s) - B(u)] \quad (12.1)$$

$$-\frac{1}{s} \{1 - \frac{1}{2t}\} \cdot \bar{I}(s, t) - \frac{1}{u} \{1 - \frac{1}{2t}\} \cdot \bar{I}(t, u) + \{\frac{1}{s} + \frac{1}{u} + \frac{1}{2su}\} \bar{I}(s, u),$$

die man mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung (A.33) findet. Für die beiden Funktionen $B(x)$, $T(x)$, deren explizite Form in (A.5) bzw. (A.8) angegeben ist, wurde ein Unterprogramm formuliert. Re $I(x, y)$ ist nach (A.11) eine Linearkombination von Spence-Funktionen. Bei ihrer Berechnung wird für komplexe Argumente der Algorithmus (A.25) verwendet, für reelle Argumente kann auf den von Mitchell ³⁹⁾ angegebenen Algorithmus (A.26) zurückgegriffen werden.

Zum Vergleich mit der hochenergetischen Streuung ist der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt der Ordnung e^4 in der Niederenergienäherung bei optischen Frequenzen für die Energie $\omega = 4.1 \cdot 10^{-6}$ m der Na_D -Linie ($\lambda = 589$ nm) sowie für die Energien $\omega = 1\text{m}, 3\text{m}, 10\text{m}$ in der Umgebung der Paar-erzeugungsschwelle im Winkelbereich $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ berechnet (Diagramm 1).

Im Hochenergiefall sind Real- und Imaginärteil der dominierenden Streuamplituden $M_{1111}^{(4)}$, $M_{1212}^{(4)}$, $M_{2222}^{(4)}$ für die Photonenenergie $\omega = 2 \cdot 10^3$ m = 1.022 GeV im Streuwinkelbereich $0 \leq \vartheta \leq 5$ mrad numerisch ausgewertet (Diagramme 2 - 4). Zum unpolarisierten Streuquerschnitt (Diagramm 5) tragen die beiden anderen Amplituden $M_{1122}^{(4)}$, $M_{1221}^{(4)}$ hier weniger als 7 % bei.

Die Einfallsenergie $\omega = 2 \cdot 10^3$ m wurde unter folgenden Gesichtspunkten gewählt: Eine Abschätzung der analytisch bekannten Vorwärtsstreuamplituden in der Ordnung e^4 (8.9) und in der Ordnung e^8 (11.10) zeigt, daß bei $\omega = 10^3$ m die Vorwärtsstreuamplitude 8. Ordnung die 4. Ordnung dem Betrag nach noch unterschreitet und daß sie bei $\omega = 2 \cdot 10^3$ m bereits um etwa den Faktor 3.5 größer ist. Andererseits ist zu erwarten, daß der Streuquerschnitt $d\sigma_{\text{unpol}}^{(8)}/d\Omega$ einen scharfen Peak in der Vorwärtsrichtung ähnlich wie $d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}/d\Omega$ wenn auch mit anderem Winkelverhalten zeigt, der mit wachsender Einfallsenergie immer schmaler und in der Ordnung e^8 immer höher wird. Um daher die Modifikation der niedrigsten störungstheoretischen Ordnung durch den bei hohen Energien bedeutsamen Einfluß der Strahlungskorrektur 8. Ordnung zu zeigen, muß die Einfallsenergie ω groß gewählt werden, jedoch so, daß die Abänderung noch bei experimentell realisierbaren Streuwinkeln sichtbar ist.

In der Ordnung e^8 ist zur Berechnung der bei hohen Energien dominanten Streuamplituden $M_{1111}^{(8)}$, $M_{1212}^{(8)}$, $M_{2222}^{(8)}$ die numerische Auswertung der 7-dimensionalen Integrale (10.18) bzw. (10.19) und (10.20) für die Energie $\omega = 2 \cdot 10^3$ m im Winkelbereich $0 \leq \vartheta \leq 5$ mrad erforderlich. Hierfür steht das multidimensionale Integrationsprogramm RIWIAD (Riemann Integration with Interval Adjustment) von Lautrup, Sheppey und Dufner zur Verfügung (CERN Program Library), das auf einer Monte-Carlo-Methode basiert. Die gefundene Darstellung der Streuamplituden als 7-dimensionale Parameterintegrale über dem Einheitskubus E_7 ist besonders geeignet, da die Integranden im Innern von E_7 keine Singularitäten aufweisen. Die höchstens auf der Oberfläche von E_7 auftretenden Divergenzen bewältigt das Integrationsprogramm.

Die analytisch exakt bekannten Vorwärtsstreuamplituden (11.10) wurden in einem Testlauf in 10 min Rechenzeit mit einer Genauigkeit besser als 1.2 % reproduziert.

Bei den Streuwinkeln $\vartheta = 0.25$ mrad, 0.5 mrad beträgt die Rechenzeit ca. 20 min, um eine Genauigkeit von ca. 1.5 % zu erzielen. Für größere Streuwinkel wächst die Rechenzeit bis auf etwa 1 Stunde an. Die erreichte Genauigkeit ist im ungünstigsten Fall ca. 16 %, sie kann bei Bedarf im erforderlichen Umfang verbessert werden. Die Ergebnisse der numerischen Integration sind in den Diagrammen 2 - 4 veranschaulicht: Innerhalb der erreichten Genauigkeit unterscheiden sich die Streuamplituden $M_{1111}^{(8)}$ und $M_{1212}^{(8)}$ nicht. Nur die Amplitude $M_{2222}^{(8)}$ scheint bei Streuwinkeln $\vartheta \gg 1.5$ mrad systematisch größer als die beiden anderen zu sein.

Im Diagramm 5 ist mit den Amplituden 4. und 8. Ordnung der differentielle Wirkungsquerschnitt der unpolarisierten Photon-Photon-Streuung für die Einfallensenergie $\omega = 2 \cdot 10^3$ m im Streuwinkelbereich $0 \leq \vartheta \leq 5$ mrad abgetragen. Die eingezeichneten Fehler sind berechnet als die größten absoluten Fehler, die von der numerischen Integration herrühren.

13. Diskussion der Resultate

Im Energieintervall $\omega \leq 0.2$ m gibt die Niederenergienäherung (8.8) den unpolarisierten Photon-Photon-Streuquerschnitt in der Ordnung e^4 mit ausreichender Genauigkeit wieder. Als Beispiel ist im Diagramm 1 der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{\text{unpol}}/d\Omega$ für die Energie $\omega = 2.1$ eV $= 4.1 \cdot 10^{-6}$ m der Na_D -Linie ($\lambda = 589$ nm) aufgetragen (Kurve 1)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}}{d\Omega} &= \frac{139}{90^2} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 r_0^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 (3 + \cos^2 \vartheta)^2 & (13.1) \\ &= 0.085 \cdot (3 + \cos^2 \vartheta)^2 \left[\frac{10^{-40} \text{ b}}{\text{sr}} \right]. \end{aligned}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ist bei dieser Einfallsenergie

$$\begin{aligned}\sigma_t^{(u)} &= \frac{973}{10125} \frac{\alpha^2}{\pi} r_0^2 \left(\frac{\omega}{m}\right)^6 \\ &= 6 \cdot 10^{-64} [\text{cm}^2].\end{aligned}\quad (13.2)$$

Die Kurven $d\sigma_{\text{unpol}}^{(u)}/d\Omega$ für verschiedene Einfallsenergien sind im Niederenergie-Limes entsprechend der Separierung von Energie- und Winkelabhängigkeit im Streuquerschnitt (13.1) gegeneinander parallel verschoben. Zwischen Vorwärts- und 90° -Streuquerschnitt besteht unabhängig von der Einfallsenergie das konstante Verhältnis $(4/3)^2$.

Mit wachsender Einfallsenergie steigt der Streuquerschnitt steil an und wird weniger stark winkelabhängig. An der Paarerzeugungsschwelle $\omega = m = 0.511 \text{ MeV}$ ist er annähernd isotrop (Kurve 2) und der totale Wirkungsquerschnitt von der Größenordnung $\sigma_t^{(u)} = 1 \mu\text{b}$.

Oberhalb der Paarproduktionsschwelle ist die absorptive Streuung durch Erzeugung und Vernichtung eines reellen e^-e^+ -Paares möglich, die unterhalb $\omega = m$ rein reellen Streuamplituden erhalten einen Imaginärteil.

Der Wirkungsquerschnitt wächst zunächst noch mit der Einfallsenergie an. In Seitwärtsrichtung überschreitet er bei $\omega \approx 1.4 m$, in Vorwärtsrichtung bei $\approx 3 m$ (Kurve 3) sein Maximum von $d\sigma_{\text{unpol}}^{(u)}/d\Omega \approx 0.4 \mu\text{b/sr}$, um anschließend das Hochenergieverhalten (8.11) anzunehmen, das für die Bereiche $|t| \leq m^2$ und $|t| > m^2$ des Impulsübertrags gesondert betrachtet werden muß. Die Hochenergienäherung zeichnet sich dadurch aus, daß mit wachsender Einfallsenergie der Streuquerschnitt gemäß (8.11) insgesamt abfällt, in und nahe der Vorwärtsrichtung ($|t| \leq m^2$)

weniger stark als für die Weitwinkelstreuung ($|t| \geq m^2$), da zunehmend die Streuung unter kleinen Winkeln nahe der Einfallsrichtung favorisiert ist. Den für die hochenergetische Photon-Photon-Streuung in der Ordnung e^4 charakteristischen Verlauf des differentiellen Streuquerschnitts gibt Kurve 4 mit dem ausgeprägten Peak in Vorwärtsrichtung (und dem symmetrisch gelegenen Peak in Rückwärtsrichtung) wieder.

Im Diagramm 5 stellt die gestrichelte Kurve einen schmalen Ausschnitt aus diesem Vorwärtspeak des unpolarisierten Streuquerschnitts $d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}/d\Omega$ dar, berechnet für die Einfallsennergie $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ m} = 1.022 \text{ GeV}$ pro Photon im CM-System im Streuwinkelbereich $\vartheta = 0 - 5 \text{ mrad}$. Der Wirkungsquerschnitt in Vorwärtsrichtung $\vartheta = 0$ beträgt $d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}/d\Omega \approx 4.2 \cdot 10^{-4} \mu\text{b/sr}$. Er nimmt auf $d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}/d\Omega \approx 1.3 \cdot 10^{-4} \mu\text{b/sr}$ für den Streuwinkel $\vartheta = 5 \text{ mrad}$ ab.

Die bisher besprochene unpolarisierte Photon-Photon-Streuung niedrigster störungstheoretischer Näherung erfährt nun bei hohen Energien wie der gewählten Photonenenergie $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ m}$ eine bemerkenswerte Abänderung, wenn man die Strahlungskorrektur proportional e^8 berücksichtigt, die durch die Feynman-Graphen in Fig.5 definiert ist. Nimmt man nämlich zu den Amplituden der Ordnung e^4 die in der Ordnung e^8 hinzu und berechnet mit den Streuamplituden (4.8) den unpolarisierten Wirkungsquerschnitt (3.15) $d\sigma_{\text{unpol}}/d\Omega$ bei der Einfallsennergie $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ m}$ (ausgezogene Kurve im Diagramm 5), so zeigen sich folgende Effekte:

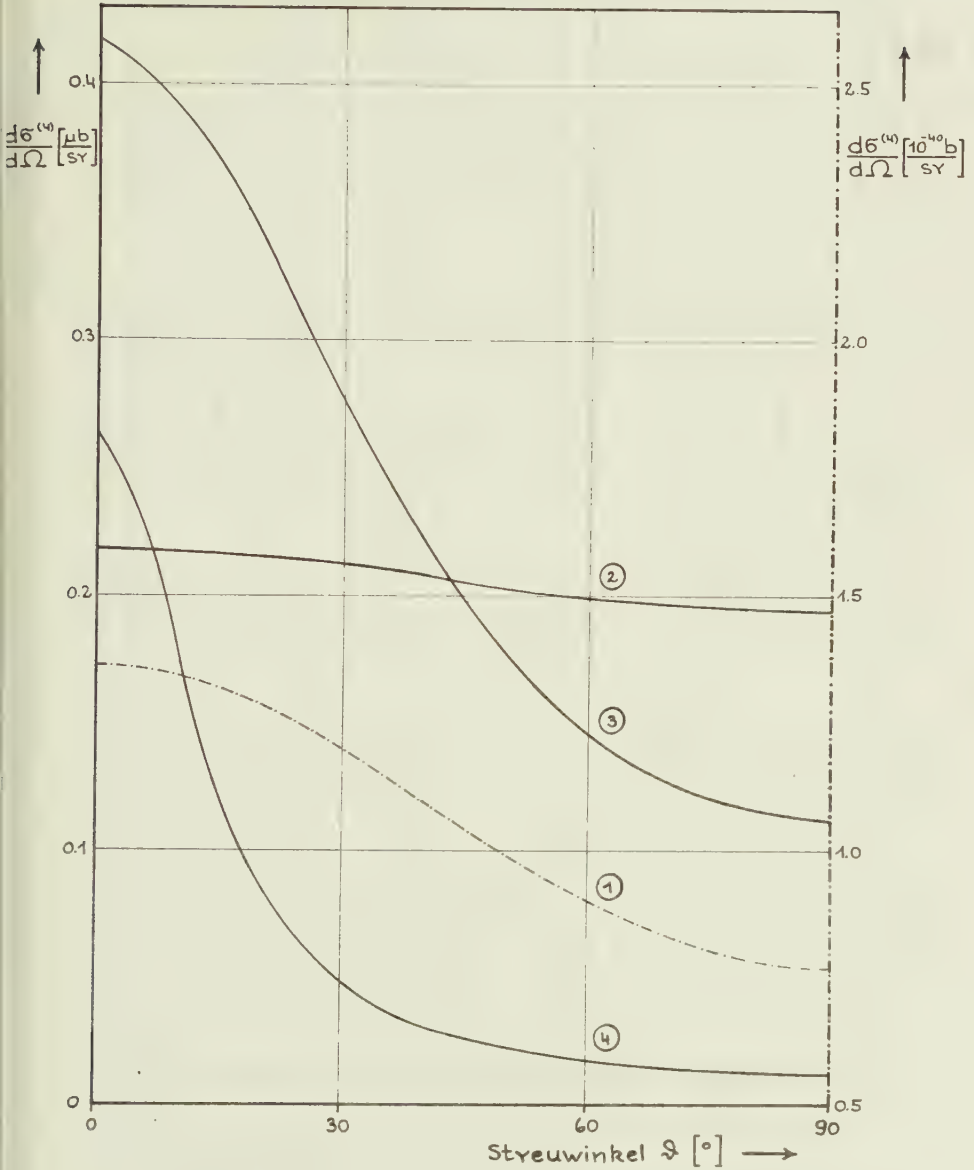
Der Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{\text{unpol}}/d\Omega$ der hochenergetischen unpolarisierten Photon-Photon-Streuung ist bei der Einfallsennergie $\omega = 1.022 \text{ GeV}$ im Streuwinkelbereich $\vartheta = 0 - 3.5 \text{ mrad}$ bedeutend größer als auf Grund allein der niedrigsten Ordnung zu erwarten ist. Der exakt bekannte Vorwärtsstreuquerschnitt $d\sigma_{\text{unpol}}/d\Omega = 28.2 \cdot 10^{-4} \mu\text{b/sr}$ überwiegt dabei $d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}/d\Omega = 4.2 \cdot 10^{-4} \mu\text{b/sr}$ um den Faktor 6.7.

Bei $\vartheta \approx 3.5$ mrad, entsprechend dem Impulsübertrag $q = \sqrt{-4t} \approx 7 \text{ m} = 3.6 \text{ MeV}$ schneidet $d\sigma_{\text{unpol}}/d\Omega$ den Wirkungsquerschnitt niedrigster Ordnung und unterschreitet ihn bei Winkeln $\vartheta > 3.5$ mrad, bedingt durch destruktive Interferenz zwischen den absorptiven Anteilen der hochenergetisch dominierenden Streuamplituden 4. und 8. Ordnung. $d\sigma_{\text{unpol}}/d\Omega$ dürfte sich bei noch größeren Streuwinkeln $d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}/d\Omega$ wieder nähern. Das wurde numerisch wegen zu langer Rechenzeiten nicht untersucht. Zudem ist fraglich, bis zu welchen Winkeln die der Rechnung in 8. Ordnung zugrunde liegende Stoßfaktor-Darstellung (9.2) der Streuamplitude noch gültig ist, da man erwarten muß, daß bei großen Streuwinkeln im absorptiven Anteil der Streuamplitude bei der Hochenergienäherung vernachlässigte Terme und der dispersive Anteil wichtig werden.

Durch die numerische Integration der Streuamplituden 8. Ordnung bei den eingezeichneten Streuwinkeln bedingte Fehler ergeben im Streuquerschnitt $d\sigma_{\text{unpol}}/d\Omega$ einen resultierenden Fehler, der als größtmöglicher Absolutfehler bestimmt und eingetragen wurde. Er kann, falls erforderlich, verkleinert werden, wenn man längere Rechenzeiten einräumt.

Die hier erreichte Rechengenauigkeit genügt, um den Einfluß der Strahlungskorrekturen 8. Ordnung zur niedrigsten störungstheoretischen Näherung nachzuweisen und eine erste Übersicht zu geben, welchen Beitrag man von ihnen zur hochenergetischen unpolarisierten Photon-Photon-Streuung erwarten darf. Es erscheint auf Grund der gewonnenen Ergebnisse wünschenswert, die Photon-Photon-Streuung bei Einfallsenergien $\omega \approx 1 \text{ GeV}$ pro Photon im CM-System bei Streuwinkeln bis zu etwa $\vartheta = 10$ mrad experimentell zu untersuchen.

Diagramm 1: Photon-Photon-Streuung in der Ordnung e^4



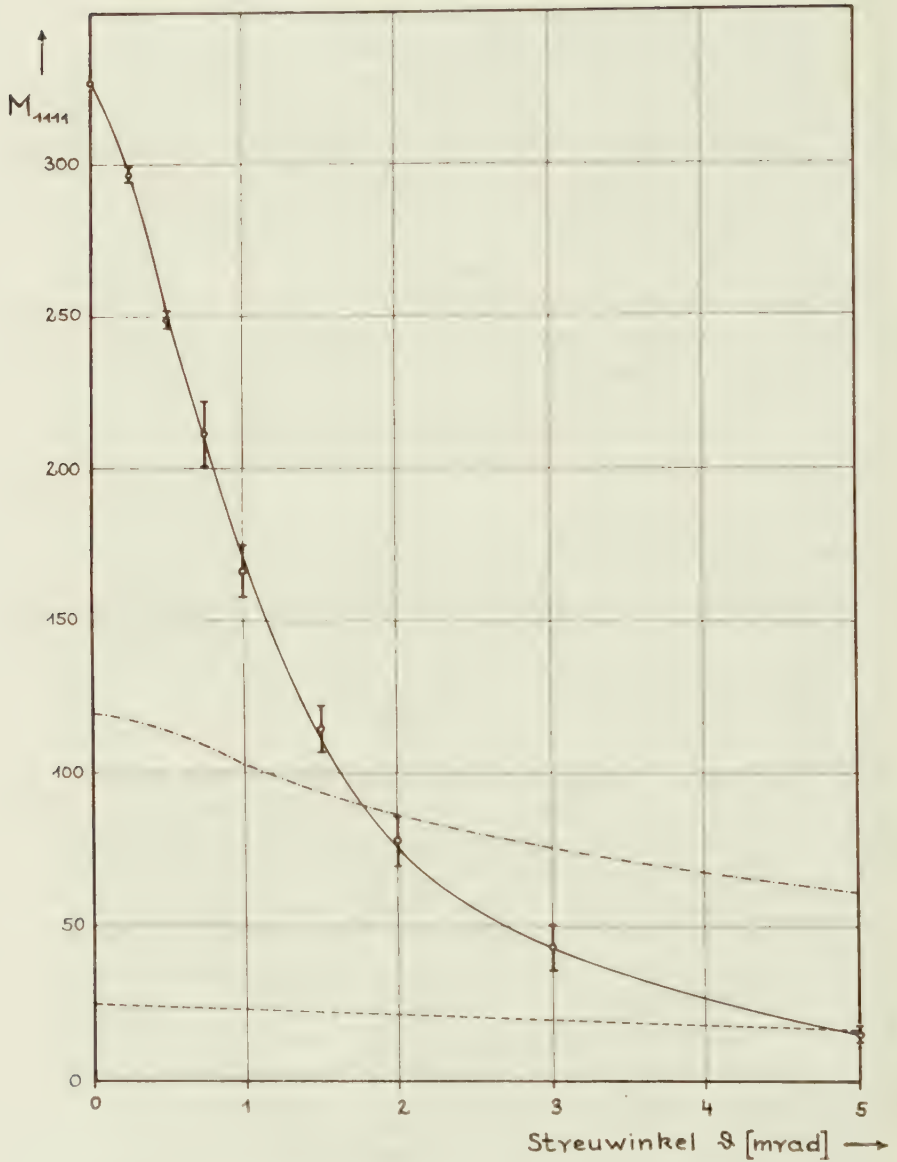
Einfallsenergie: $\omega = 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, Kurve 1 (re. Skala)

$\omega = 1 \text{ m}$, Kurve 2 (li. Skala)

$\omega = 3 \text{ m}$, Kurve 3 (")

$\omega = 10 \text{ m}$, Kurve 4 (")

Diagramm 2: Streuamplitude M_{1111}



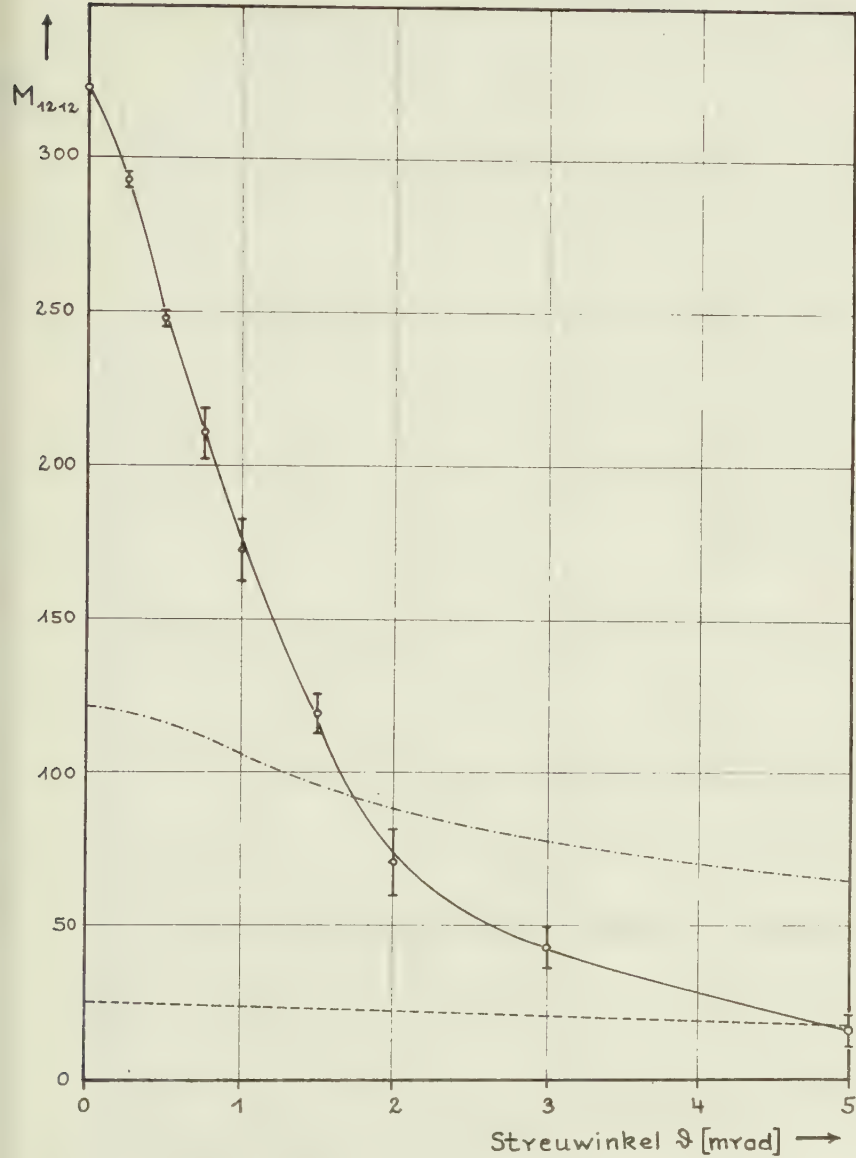
Einfallsenergie $\omega = 2 \cdot 10^3$ m;

----- : $\text{Re } M_{1111}^{(4)}$

- · - · - : $-\text{Im } M_{1111}^{(4)}$

———— : $\text{Im } M_{1111}^{(8)}$

Diagramm 3: Streuamplitude M_{1212}



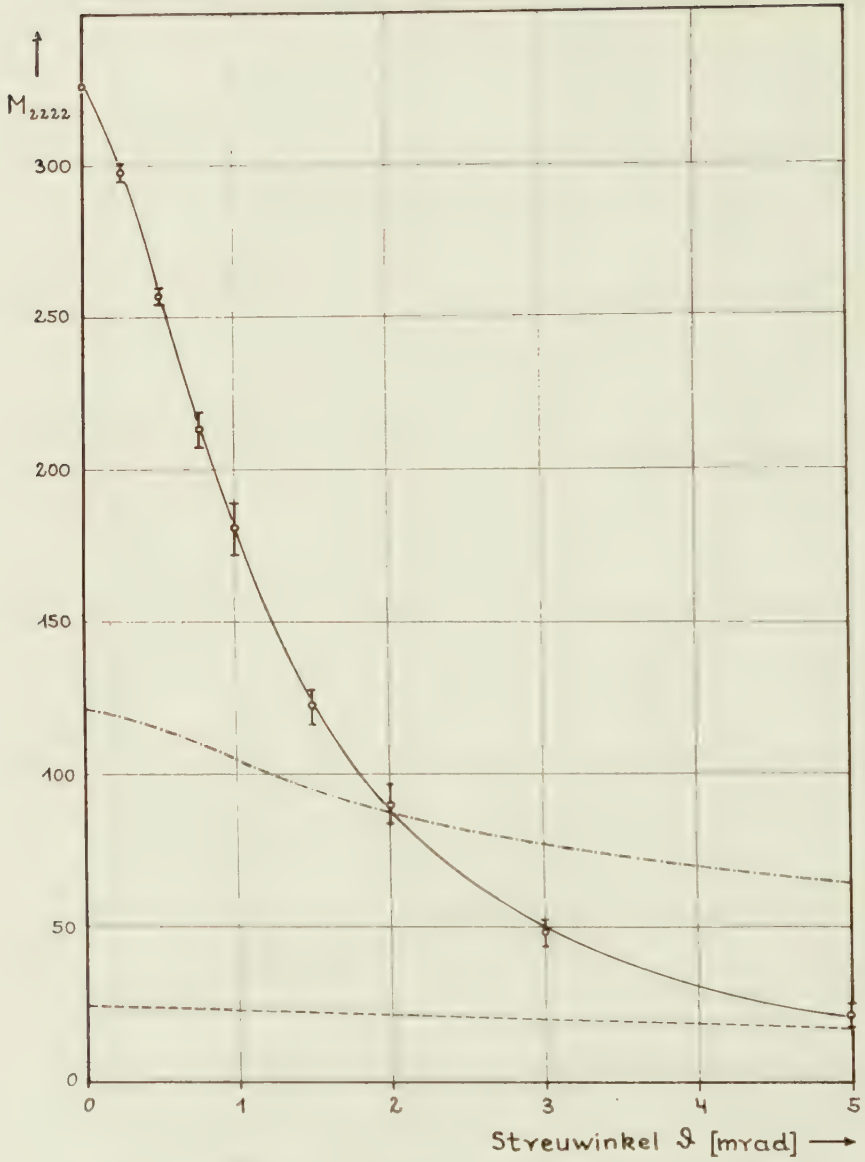
Einfallsenergie $\omega = 2 \cdot 10^3$ m;

--- : $\text{Re } M_{1212}^{(4)}$

--- : $-\text{Im } M_{1212}^{(4)}$

— : $\text{Im } M_{1212}^{(8)}$

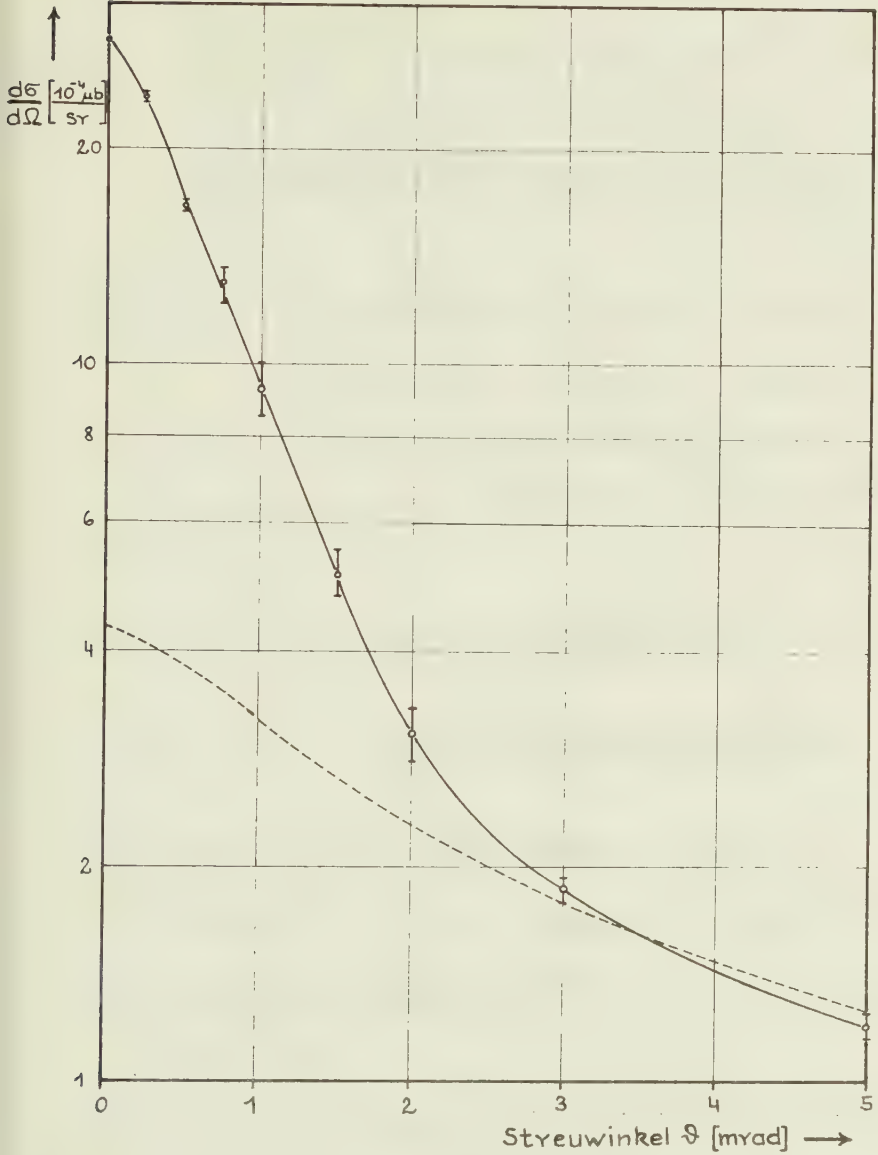
Diagramm 4: Streuamplitude M_{2222}



Einfallsenergie $\omega = 2 \cdot 10^3$ m;

----- : $\text{Re } M_{2222}^{(4)}$
 ----- : $-\text{Im } M_{2222}^{(4)}$
 ————— : $\text{Im } M_{2222}^{(4)}$

Diagramm 5: Hochenergetische Photon-Photon-Streuung



Einfallsenergie: ----- : $\frac{d\sigma_{\text{unpol}}^{(4)}}{d\Omega}$ (Ordnung e^4)

$\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ m}$ ————— : $\frac{d\sigma_{\text{unpol}}}{d\Omega}$ (Ordnungen $e^4 + e^8$)

Anhang: Die transzendenten Funktionen B(x), T(x), I(x,y)

Die von Karplus und Neumann ³¹⁾ eingeführten und von De Tollis ³³⁾ für die Mandelstam-Darstellung der Photon-Photon-Streuung 4. Ordnung als Doppelintegrale mit dem Integrationsgebiet

$$D = \{(u,v) / (u,v) \in \mathbb{R}^2, uv > 0, uv - u - v > 0\} \quad (A.1)$$

neu definierten 3 transzendenten Funktionen sind

$$B(x) = -\frac{1}{4}x \iint_D \frac{du dv}{u-x-i\epsilon} \frac{1}{\Delta(u,v)} \frac{1}{v} \quad (A.2)$$

$$= -\frac{1}{2}x \int_1^{\infty} \frac{du}{u} \frac{a(u)}{u-x-i\epsilon} \quad (A.3)$$

$$= -\frac{1}{4} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2} \frac{1}{a(u,x)} \ln \frac{a(u,x) + a(u)}{a(u,x) - a(u)} \quad (A.4)$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2} \operatorname{arsinh} \sqrt{-x} - 1, & x < 0 \\ \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/2} \arcsin \sqrt{x} - 1, & 0 < x < 1 \\ \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2} \operatorname{arcosh} \sqrt{x} - 1 - i\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2}, & 1 < x \end{cases} \quad (A.5)$$

$$T(x) = -\frac{1}{2}x \iint_D \frac{du dv}{u-x-i\epsilon} \frac{1}{\Delta(u,v)} \frac{u}{u+v} \quad (A.6)$$

$$= -\frac{1}{2}x \int_1^{\infty} \frac{du}{u} \frac{1}{u-x-i\epsilon} \ln \frac{1+a(u)}{1-a(u)} \quad (A.7)$$

$$T(x) = \begin{cases} (\operatorname{arsinh} \sqrt{-x})^2, & x < 0 \\ -(\arcsin \sqrt{x})^2, & 0 < x < 1 \\ (\operatorname{arcosh} \sqrt{x})^2 - \frac{\pi^2}{4} - i\pi \operatorname{arcosh} \sqrt{x}, & 1 < x \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

$$\bar{I}(x, y) = \frac{1}{2} xy \iint_D \frac{du dv}{(u-x-i\epsilon)(v-y-i\epsilon)} \frac{1}{\Delta(u, v)} \quad (\text{A.9})$$

$$= -\frac{1}{2} x \int_1^\infty \frac{du}{u} \frac{1}{u-x-i\epsilon} \frac{1}{a(u, v)} \ln \frac{a(u, v) + a(u)}{a(u, v) - a(u)} \quad (\text{A.10})$$

$$= \operatorname{Re} \bar{I}(x, y) + i \operatorname{Im} \bar{I}(x, y)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \bar{I}(x, y) = \frac{1}{2a} \left\{ \phi\left(\frac{a+1}{a+b(x)}\right) + \phi\left(\frac{a+1}{a-b(x)}\right) \right. \\ \left. - \phi\left(\frac{a-1}{a+b(x)}\right) - \phi\left(\frac{a-1}{a-b(x)}\right) + (x \leftrightarrow y) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{Im} \bar{I}(x, y) = -\frac{\pi}{2a} \begin{cases} \ln \frac{a+b(x)}{a-b(x)}, & x > 1 \\ \ln \frac{a+b(y)}{a-b(y)}, & y > 1 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Die verwendeten Hilfsgrößen sind

$$a(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2}, \quad a(x, y) = \left(1 - \frac{x+y}{xy}\right)^{1/2} = a \quad (\text{A.13})$$

$$\Delta(x, y) = (xy(xy-x-y))^{1/2}, \quad b(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{1/2}, & x < 0, x > 1 \\ i\left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/2}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

$$\Phi(z) = \int_0^z dt \frac{\ln(1-t)}{t} \quad (\text{A.14})$$

ist die Spence-Funktion (Dilogarithmus)^{39,40)} mit

$$(1) \quad \Phi(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| \leq 1 \quad (\text{A.15})$$

$$(2) \quad \Phi(1) = -\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6} \quad (\text{A.16})$$

Es gelten folgende Funktionalgleichungen für $z \in \mathbb{C}$ mit den für $\text{Re}\Phi(z)$, $z \in \mathbb{R}$ gültigen Spezialisierungen

$$(3) \quad \Phi(z) + \Phi\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2(-z) \quad (\text{A.17})$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2(-z), & z < 0 \\ -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln^2(z), & z > 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \Phi(z) + \Phi(1-z) = -\frac{\pi^2}{6} + \ln z \cdot \ln(1-z) \quad (\text{A.18})$$

$$= -\frac{\pi^2}{6} + \ln|z| \cdot \ln|1-z|, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$(5) \quad \Phi(z) - \Phi\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln(1-z) \cdot \ln \frac{z^2}{1-z} \quad (\text{A.19})$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln(1-z) \cdot \ln \frac{z^2}{1-z}, & z < 1 \\ -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln(z-1) \cdot \ln \frac{z^2}{z-1}, & z > 1 \end{cases}$$

$$(6) \quad \phi(z) - \phi\left(\frac{z-1}{z}\right) = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln z \cdot \ln \frac{(z-1)^2}{z} \quad (\text{A.20})$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} \ln(-z) \cdot \ln \frac{(z-1)^2}{(-z)}, & z < 0 \\ -\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln(z) \cdot \ln \frac{(z-1)^2}{z}, & z > 0 \end{cases}$$

$$(7) \quad \phi(z) + \phi\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{1}{2} \ln^2(1-z) \quad (\text{A.21})$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} \cdot \Theta(z-1) + \frac{1}{2} \ln^2|1-z|, \quad z \in \mathbb{R}$$

Ferner bestehen mit Hilfe der besser als (1) konvergierenden Reihen

$$S_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2(n+1)^2}, \quad |z| \leq 1 \quad (\text{A.22})$$

$$S_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \quad |z| \leq 1$$

folgende Darstellungen der Spence-Funktion im Einheitskreis:

$$(8) \quad \phi(z) = -\frac{z\{3 + S_1(z)\} + 2(1-z) \cdot \ln(1-z)}{z+1}, \quad |z| \leq 1, z \neq -1 \quad (\text{A.23})$$

$$(9) \quad \phi(z) = -\frac{1}{4} \frac{z^2\{23 + 16 S_2(z)\} + 16z + 12(1-z^2) \cdot \ln(1-z)}{z^2 + 4z + 1},$$

$$|z| \leq 1, z \neq \sqrt{3}-2$$

$$(\text{A.24})$$

Zur numerischen Berechnung der Spence-Funktion benutzt man die Funktional-Gleichungen (3) - (7) und die beiden Darstellungen (8) und (9):

Für $z \in \mathbb{C}$ wird im Kreis $|z| \leq \frac{1}{2}$ Formel (8) verwendet. Im Kreisring $\frac{1}{2} < |z| \leq 1$ ist (9) mit der beschleunigt konvergierenden Reihe S_2 zu nehmen. Für $|z| > 1$ stellt die Inversions-Formel (3) die geeignete Beziehung zu den Werten der Spence-Funktion im Einheitskreis her:

$ z \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < z \leq 1$	$ z > 1$
(8)	(9)	(3)

(A.25)

Für $z \in \mathbb{R}$ gelingt es, $\Phi(z)$ über die Funktional-Gleichungen durch $\Phi(z')$, $0 \leq z' \leq \frac{1}{2}$ auszudrücken³⁹⁾. Im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ wird (8) mit der hier genügend rasch konvergierenden Reihe S_1 genommen:

$z \leq -1$	$-1 < z < 0$	$0 \leq z \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < z < 1$	$z = 1$	$1 \leq z \leq 2$	$2 < z$
(5)	(7)	(8)	(4)	(2)	(6)	(3)

(A.26)

Die Niederenergie-Näherungen der Streuamplituden (8.6) leitet man aus den folgenden Potenzreihen-Entwicklungen der Funktionen $B(x)$, $T(x)$, $I(x, y)$ ab:

$$\begin{aligned}
 B(x) &= - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-2)!!}{(2\nu+1)!!} x^{\nu}, \quad |x| \leq 1 \\
 &= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{15}x^2 - \frac{8}{105}x^3 + O(x^4)
 \end{aligned}
 \tag{A.27}$$

$$T(x) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-2)!!}{(2\nu-1)!!} \frac{x^{\nu}}{\nu}, \quad |x| \leq 1 \quad (\text{A.28})$$

$$= -x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{45}x^3 + O(x^4)$$

$$\begin{aligned} \overline{I}(x, \gamma) &= 2 \cdot \sum_{\nu, \mu=1}^{\infty} \frac{(2\nu-2)!!(2\mu-2)!!}{(2\nu+2\mu-1)!!} x^{\nu} \gamma^{\mu}, \quad |x|, |\gamma| \leq 1 \\ &= \frac{2}{3}x\gamma + \frac{4}{45}x\gamma(x+\gamma) + \frac{8}{405}x\gamma(2x^2+x\gamma+2\gamma^2) + O(x^4, \gamma^4). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Für große Argumente besitzen $B(x)$ und $T(x)$ folgende asymptotische Entwicklungen, die man unmittelbar an ihrer expliziten Gestalt (A.5) bzw. (A.8) abliest:

$$B(x) \simeq \frac{1}{2} \ln |4x| - 1 - i \frac{\pi}{2} \Theta(x), \quad |x| \gg 1 \quad (\text{A.30})$$

$$T(x) \simeq \frac{1}{4} \ln^2 |4x| - \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + i \ln |4x| \right\} \cdot \Theta(x), \quad |x| \gg 1. \quad (\text{A.31})$$

Von $I(x, \gamma)$ werden für die Hochenergie-Näherungen der Photon-Photon-Streuamplituden proportional e^4 folgende asymptotische Entwicklungen benötigt:

$$\begin{aligned} \overline{I}(x, \gamma) &\simeq \frac{1}{4} \left\{ \ln^2 |4x| + \ln^2 |4\gamma| - \ln^2 \left| \frac{x}{\gamma} \right| - \pi^2 \right\} \\ &\quad - i \frac{\pi}{2} \Theta(x) \cdot \ln |4\gamma|, \quad |x| \gg 1, \gamma \ll -1 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\mathbb{I}(x, y) \approx -\frac{1}{4}xy \cdot z^2(1+z)$$

$$+ z \left\{ x + f_1(x) \cdot z + f_2(x) \cdot z^2 \right\} \cdot B(x)$$

$$+ z \left\{ y + f_1(y) \cdot z + f_2(y) \cdot z^2 \right\} \cdot B(y)$$

$$+ \left\{ 1 + \frac{1}{2}z + \frac{3}{8}z^2 + \frac{5}{16}z^3 \right\} [T(x) + T(y)],$$

$$|z| \ll 1$$

wobei $z = \frac{x+y}{xy},$

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x(3+2x),$$

$$f_2(x) = \frac{1}{24}x(15+10x+8x^2). \quad (\text{A.33})$$

Literaturverzeichnis

- 1 K. Ringhofer and H. Salecker:
" What Can Be Tested in Quantum Electrodynamics? "
1975 International Symposium on Lepton and Photon
Interactions at High Energies,
Stanford University, Stanford, Calif.
- 2 H. Salecker, Z. Naturf. 8a (1953) 16; 10a (1955) 349
- 3 H. Salecker, Z. Phys. 160 (1960) 385
- 4 S.D. Drell, Ann. Phys. 4 (1958) 75;
J.D. Bjorken et al., Phys. Rev. 112 (1958) 1409;
J.D. Bjorken, S.D. Drell, Phys. Rev. 114 (1959) 1368
- 5 G. Poiani, I. Reina, Nuovo Cim. 13 (1959) 19
- 6 N.M. Kroll, Nuovo Cim. 45(1966) 65
- 7 K. Ringhofer, Acta Phys. Austriaca 31 (1970) 67
- 8 G. Tomberger, Dissertation, München (1970)
- 9 M. Magg, K. Ringhofer, H. Salecker, Nucl. Phys. B40 (1972) 367
- 10 J. Kraus, Nucl. Phys. B89 (1975) 133
- 11 H. Schneider, Diplomarbeit, München (1973)
- 12 H.-D. Steinhöfer, Diplomarbeit, München (1974)
- 13 V.M. Arutyunyan et al., Sov. Phys. JETP 18 (1964) 873
- 14 G. Rosen, F.C. Whitmore, Phys. Rev. 137 (1965) 1357
- 15 A.A. Varfolomeev, Sov. Phys. JETP 23 (1966) 681
- 16 P.P. Kane, G. Basavaraju, Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 52
- 17 P.L. Csonka, Phys. Lett. 24B (1967) 625
- 18 L. Stodolsky, Phys. Rev. Lett. 26 (1971) 404
- 19 P.L. Csonka, K.S. Kölbig, Phys. Rev. D10 (1974) 251
- 20 N. Liebsch, Diplomarbeit, München (1971)
- 21 M.Y. Han, S. Hatsukade, Nuovo Cim. 26 (1961) 119;
V.N. Oraevskij, Sov. Phys. JETP 12 (1961) 730;
S.Y. Guzenko, P.I. Fomin, Sov. Phys. JETP 20 (1965) 1523
- 22 B.M. Barker et al., Phys. Rev. (1967) 1498

- 23 B. De Tollis, G. Violini, Nuovo Cim. 41 (1966) 12
- 24 W. Heisenberg, H. Euler, Z. Phys. 98 (1936) 714
- 25 J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 664
- 26 J. Mc Kenna, P.M. Platzman, Phys. Rev. 129 (1963) 2354
- 27 Aldins et al., Phys. Rev. D1 (1970) 2378
- 28 Pascual, E. de Rafael, Nuovo Cim. Lett. 4 (1970) 1144
- 29 H. Euler, Ann. d. Phys. 26 (1936);
H. Euler, B. Kockel, Naturwiss. 23 (1935) 246
- 30 A. Achieser, Phys. Zeits. Sowj. 11 (1937) 263
- 31 R. Karplus, M. Neumann, Phys. Rev. 80 (1950) 380;
Phys. Rev. 83 (1951) 776
- 32 V. Costantini et al., Nuovo Cim. 2A (1971) 733
- 33 B. De Tollis, Nuovo Cim. 32 (1964) 757;
Nuovo Cim. 35 (1965) 1182
- 34 M. Jacob, G.C. Wick, Ann. Phys. 7 (1959) 404
- 35 H. Cheng, T.T. Wu, Phys. Rev. 182 (1969) 1852; 1868;
1873; 1899; Phys.Rev. D1 (1970) 3414
- 36 R.E. Cutkosky, J. Math. Phys. 1 (1960) 429
- 37 F.C. Khanna, F. Rohrlich, Phys. Rev. 131 (1963) 2721
- 38 S.-J. Chang, S.-K. Ma, Phys. Rev. 188 (1969) 2385
- 39 K. Mitchell, Phil. Mag. 40 (1949) 351
- 40 L. Lewin: Dilogarithms, Macdonald, London (1958)

Herrn Prof. Dr. H. Salecker danke ich herzlich für die Themenstellung, die Anleitung zu dieser Arbeit und die günstigen Arbeitsbedingungen an seinem Institut.

Den Mitgliedern des Lehrstuhls danke ich für zahlreiche Anregungen, insbesondere Herrn Dipl.-Phys. Steinhöfer für die Durchsicht der Arbeit und seine Unterstützung bei den numerischen Rechnungen.

Der Bayerischen Akademie der Wissenschaften danke ich für die Gewährung von Rechenzeit an dem TR 440 des Leibniz-Rechenzentrums München.

Lebenslauf:

Norbert Liebsch, geb. 22.9.1945 in Haselünne/Krs. Meppen
Eltern: Dr. Berthold Liebsch und Johanna Liebsch,
geb. Litzka

1952 - 1956 Volksschule Meppen-Altstadt

1956 - 1965 Altsprachliches Gymnasium Meppen,
Abitur 25.2.1965

SS 65 - SS 68 Physik-Studium an der Westfälischen
Wilhelms-Universität Münster,
Dipl.-Physiker-Vorprüfung 18.10.1967

WS 68/69 - SS 72 Physik-Studium an der
Ludwig-Maximilians-Universität München,
Dipl.-Arbeit bei Prof. Dr. H. Salecker zum Thema:
" Photon-Photon-Streuung und die Prüfung der
Quantenelektrodynamik ",
Dipl.-Physiker-Hauptprüfung 13.7.1972

Seit Mai 1970 wissenschaftliche Hilfskraft bei der
Sektion Physik der Universität München

Seit November 1972 Verwalter der Dienstgeschäfte eines
wissenschaftlichen Assistenten bei der Sektion Physik
der Universität München



Dissertationsdruck
GmbH & Co. KG.

Schadel & Wehle

8 München 40 Amalienstr. 81 Telefon 089/288 784/2. Etage